בואו נפתור

בעיות למחשבה
מתוך "גליונות לחשבון"

בעריכתו של **פרופ' שמואל אביטל**, הטכניון

לפניכם לקט נוסף של בעיות הלקוחות מתוך "גליונות לחשבון" — עלון לתלמיד היוצא לאור במחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים בטכניון.
כפי שציינו כבר בעל"ה 5, העלון נועד בעיקר לתלמידי כיתות ט' ר"י המתעניינים במתמטיקה לדעתינו, למרות שאין פיתרון הבעיות דורש ידע מתמטי מתקדם, גם תלמידי הכיתות הגבוהות ימצאו בהן עניין.
הבעיות ופתרונן מובאות כאן כלשונן, כפי שפורסמו ב"גליונות לחשבון"

המעוניינים במנוי לגליונות ימצאו טופס חתימה בסוף החוברת.

בעיות במספרים

סכום ספרות סופי

1. כאשר נתון מספר טבעי הרשום לפי שיטת בסיס כלשהי ואנו מחברים את ספרותיו, ובהמשך מחברים שוב את סיפרות התוצאה, וכן הלאה, עד שמגיעים למספר בן סיפרה אחת, אנו מכנים את התוצאה בשם **סכום ספרות סופי.**

נעסוק כאן רק ברישום המספרים לפי בסיס 10, כך שלהבא לא נזכיר יותר את בסיס הרישום. לדוגמה סכום ספרות סופי של המספר 3749 יהיה 3749–23–5 (בחיבור ראשוני מקבלים 23 ושוב על ידי חיבור 2+3 מקבלים 5 כסכום סופי) הננו מבקשים מכם לגלות שתי תכונות מיוחדות של הסכום הסופי של ספרות מספר כלשהו.

א. מהו המספר שהוא בעל התכונה שכאשר מחברים אותו, או את כפולתו, למספר כלשהו, תוספת זאת איננה משנה את סכום הספרות הסופי של המספר המקורי.
ב סכום הספרות הסופי של המספרים הטבעיים יכול להיות כל מספר טבעי בין 1 ל־9 אבל הריבועים של המספרים הטבעיים יכולים לקבל רק חלק מתשעת ערכים אלה. מה הם הערכים שסכום ספרות סופי של ריבוע אינו יכול לקבלי

מספרים עיקשים

2 נצא מהמספר 679. נכפיל כל ספרותיו זו בזו ונקבל 378 שוב נכפיל את שלוש הספרות ונקבל 168. נמשיך כך הלאה, כך שכל מספר הוא מכפלה של ספרות המספר שלפניו נקבל את הסדרה.

$$679 \to 378 \to 168 \to 48 \to 32 \to 6$$

קיבלנו חמישה צעדים בסך הכל, לפני שהמספר הצטמק למספר בן סיפרה אחת.

מתמטיקאי בשם סלואן (Sloan) מכנה את אורכה של שרשרת מסוג זה בשם
דרגת העיקשות של המספר שיצאנו ממנו
ובכן, למספר 679 יש עיקשות מדרגה 5.
לפי הגדרה זאת דרגת העיקשות של 10 היא 1.
דרגת העיקשות של 261 היא 2. ($261 \to 12 \to 2$)
דרגת העיקשות של 39 היא 3. ($39 \to 27 \to 14 \to 1$)
מצא מספר קטן מ־100 בעל דרגת עיקשות 4

מספרים מאושרים

3. למספרים הטבעיים תכונות מעניינות ביותר, הנחקרות עד היום וביחס לרבים מהם אנו יודעים כה מעט, שמישהו אמר
המספרים הטבעיים מראים את אפסות יכולתו של האדם, הוא המציא את המספרים הטבעיים ובכל זאת אינו מכיר את תכונותיהם כך למשל ישנם המספרים המשוכללים שהם מספרים שסכום מחלקיהם (כולל 1, אך לא כולל המספר עצמו) שווה למספר עצמו כגון 6, 28, 496 וכו׳ ועד היום לא ידוע האם קיים מספר משוכלל אי־זוגי.

ישנם זוגות של מספרים חברים — שהם זוגות של מספרים בהם סכום המחלקים של כל אחד מבני מזוג שווה למספר השני, למשל 220 ו־284 עד היום אין לנו נוסחה כללית שתוביל אותנו לכל הזוגות האלה

תלמיד בשם ד׳ ונסינג הציע את השם **מספרים מאושרים** למספרים הטבעיים שתתגלה בהם התכונה הבאה

ניחס לכל מספר, הרשום לפי שיטת בסיס 10, את סכום הריבועים של ספרותיו.

לסכום זה ניחס שוב את סכום ריבועי הספרות שלו וכן הלאה לפעמים נגיע ללולאה, כלומר לסידרה של מספרים שתחזור על עצמה
למשל נצא מן המספר 25

$$25 = 2^2 + 5^2 = 29 \to 2^2 + 9^2 = 85 \to 8^2 + 5^2 = 89 \to 8^2 + 9^2 = 145 \to$$
$$\to 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \to 4^2 + 2^2 = 20 \to 2^2 + 0^2 = 4$$

בהמשך יתגלה שהמספר 4 אכן מוביל לולאה החוזרת על עצמה

$$4^2 = 16 \to 1^2 + 6^2 = 37 \to 3^2 + 7^2 = 58$$

הספרות של 58 נותנות אותה תוצאה כמו אלו של 85, וראינו שהן מובילות בחזרה ל־4.
ברור גם שכל אחד מהמספרים 16, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20 גם כן מוביל ללולאה של 4.

אולם מספרים שסכום הריבועים של ספרותיהם הוא 1 הם *המאושרים*, כי כל מספר כזה מוביל ללולאה בת איבר אחד – כלומר הוא מיד חוזר על עצמו.

מספרים מאושרים כאלה הם כמובן 10, 100 וכן כל חזקה של 10 אבל גם 13 הוא מספר מאושר כי $1^2 + 3^2 = 10$, וגם המספרים 68, 86, 82 הם מספרים מאושרים

והנה שתי שאלות·

(א) פרט למספר 1, ישנו עוד *מספר חד־ספרתי* אחד שהוא מאושר. מצא אותו

(ב) קרוב למספר 100 ישנו מספר דו־ספרתי אחד שהוא מאושר מצא אותו.

בעיות בגאומטריה

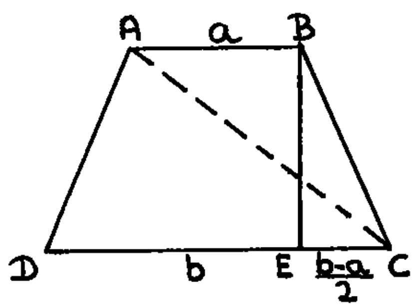
נחשב יחס מבלי לדעת אף אורך

4. נתון טרפז שווה־שוקיים

בטרפז זה הבסיס הקצר (הצלע AB הקטנה מבין שתי הצלעות המקבילות) שווה לגובה הטרפז h, והבסיס הארוך CD שווה לאלכסון הטרפז נזכור שבטרפז שווה שוקיים שני האלכסונים שווים נשים לב שלא נתונה כאן מידת האורך של אף אחד משני הקטעים AB ו CD, ובכל זאת נוכל לחשב את היחס בין מידות האורך של שני בסיסים אלה. אומנם, נניח שאורכי הבסיסים הם a ו b זכור כי אורך הגובה הוא h ו $h = a$ וכן $AC = CD$ בגלל העובדה שהטרפז הוא שווה שוקיים אורך הקטע EC הוא $(b - a) / 2$ (למהי)

לפיכך אורך הקטע ED הוא

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{2b - b + a}{2} = \frac{b+a}{2}$$



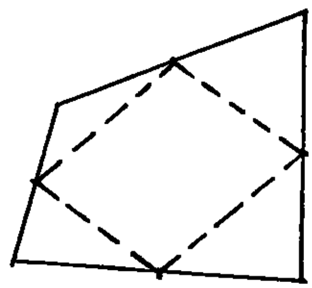
ומכאן תוכלו לחשב בעצמכם את היחס בין אורכי שני הבסיסים
מהו יחס זהי

בנייה גיאומטרית מעניינת

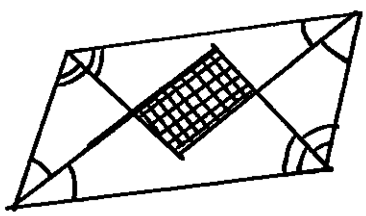
5. במשולש נתונות שתי זוויות α ו־β (נדרוש כמובן $\alpha + \beta < 180°$), וכן נתון היקפו של משולש זה. הבעיה היא. לבנות משולש זה בעזרת סרגל ומחוגה
נשים לב שאם נתונות שתי זוויות אפשר מיד לחשב את הזווית השלישית. כי הרי סכום שלוש הזוויות חייב להיות 180°

והנה רמז לבנייה נבנה משולש שההיקף הנתון הוא אחת הצלעות, ולידה שתי הזוויות הנתונות אחר כך נשבור בכל קצה את הצלע השווה להיקף, כדי לקבל את המשולש הדרוש נזכור שאם $\alpha + \beta < 180°$ נוכל תמיד לקבל משולש המקיים את כל הנתונים.

ממרובע למקבילית וממקבילית למלבן



6. משפט גיאומטרי מעניין ומפתיע הוא המשפט הטוען כי אם במרובע קמור כלשהו נחבר את נקודות האמצע של צלעות שכנות נקבל תמיד מקבילית.
טענה זאת היא תוצאה ישירה מן המשפט, שוודאי למדתם אותו, האומר
בכל משולש קטע האמצעים של כל שתי צלעות מקביל לצלע השלישית ושווה לחציה



אם נמשיך ונעביר במקבילית שקיבלנו את החוצים של ארבע הזוויות נקבל מלבן. טענה זאת היא תוצאה מן המשפט כי בכל מקבילית סכום שתי הזוויות שליד כל צלע הוא$180°$. מזה נובע ששני החוצים של זוויות אלה מאונכים זה לזה.

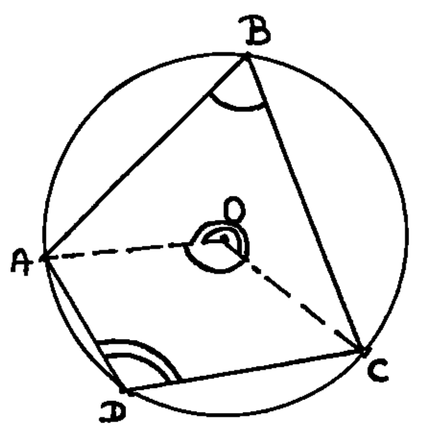
חקרו בעצמכם.

(I) איזו צורה תתקבל כאשר נחבר *במלבן* את נקודות האמצע של הצלעות השכנות? מדוע?

(II) התוכלו לגלות מקבילית שאם נעביר בה את ארבעת חוצי הזוויות "המלבן" שנקבל יתנוון לנקודה אחת? אם תגלו מקבילית כזאת נמקו מדוע זה קורה במקבילית ממין זה.

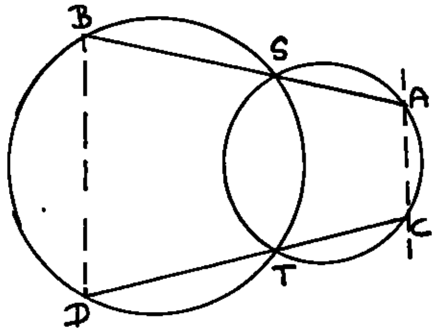
(III) מתי מקבלים ריבוע על ידי העברת קווים כנ"ל?

על מרובע קמור ותכונותיו



7 מוכיחים בבית הספר כי בכל מרובע קמור החסום במעגל סכום המידות של כל זוג זוויות נגדיות במרובע זה שווה ל-$180°$ בציור המצורף $\measuredangle B + \measuredangle D = 180°$ וכן $\measuredangle A + \measuredangle C = 180°$ ההוכחה מבוססת על המשפטים בדבר הקשר שבין המידה של זווית היקפית והמידה של זווית מרכזית המתאימה לה למשל בציור שלנו $\measuredangle ABC = \frac{1}{2} \measuredangle AOC$. אותו דבר נכון

ביחס לזווית ADC והזווית המשלימה את $\measuredangle AOC$ ל 360° (מסומנת בשתי קשתות) לפיכך הסכום של $\measuredangle B$ ו $\measuredangle D$ הוא מחצית של זווית שלמה כלומר 180°.

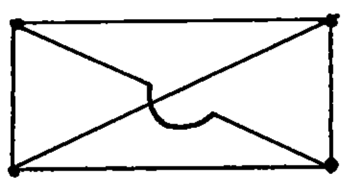


על סמך משפט יפה זה תוכלו להוכיח משפט מפתיע ציירו שני מעגלים כלשהם שהם נחתכים בשתי נקודות: בציור שלנו בנקודות S ו־T נעביר ישר כלשהו דרך S, החותך את המעגלים בנקודות A ו B, ויישר שני דרך T, החותך את המעגלים בנקודות C ו D. הישרים AC ו BD מקבילים.

על תצורות מישוריות

8. נקרא בשם **תצורה מישורית** לקבוצה של מספר סופי של נקודות, ומספר סופי של קטעים של קווים ישרים, במישור, כך שכל קטע של ישר עובר דרך *אותו מספר* α נקודות וכל נקודה נמצאת על *אותו מספר* β של ישרים.

למשל מלבן הוא תצורה מישורית של 4 נקודות וארבעה קטעים ישרים. כל נקודה נמצאת על שני ישרים וכל ישר עובר דרך 2 נקודות נסמן את מספר הנקודות בתצורה ב־P ואת מספר הישרים ב־L ואז הסמל הכללי של תצורה מישורית הוא (P_α , L_β). המלבן הוא תצורה מישורית $(4_2 , 4_2)$ כלומר $\alpha = \beta = 2$ וכן $P = L = 4$. אם נוסיף למלבן את שני האלכסונים, אבל לא נחשב את נקודת החיתוך של האלכסונים, נקבל תצורה מישורית של $P = 4$ נקודות אשר כל אחת על $\alpha = 3$ ישרים ו־$L = 6$ ישרים שכל אחד עובר דרך $\beta = 2$ נקודות. הסמל יהיה אז $(4_3 , 6_2)$ (שים לב: העקיפה בציור אומרת שאין לוקחים בחשבון את נקודת החיתוך).

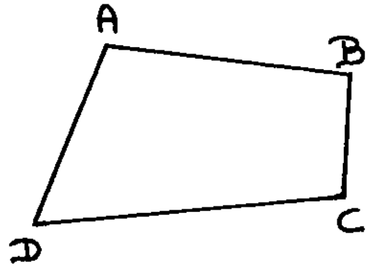


אילו הוספנו גם את נקודת האלכסון *לא* היינו מקבלים תצורה מישורית, כי מספר הנקודות שעל הישרים לא היה שווה לכל הישרים

א. אילו צורות הנדסיות מתארות התצורות המישוריות $(3_2 , 3_2)$ ו $(6_2 , 6_2)$?

ב. האם קיים קשר בין המספרים P, α, L, β? אם כן, מהו?

היכן להקים את בית הספר



.9 הנקודות A, B, C, D מסמנות ארבעה מושבים היוצרים מרובע קמור (קמור פירושו שקטע המחבר כל שתי נקודות בפנים המרובע, או על שפתו, שייך כולו למרובע) המושבים החליטו לבנות בי״ס איזורי שישמש את כולם.
השאלה היכן יש להקים את בית הספר, כך שסכום מרחקיו מכל אחד מהיישובים יהיה קטן ביותר? (עליכם לקבוע את הנקודה שבה יש להקים את בית הספר, ולהוכיח שהיא באמת נותנת סכום מרחקים מינימלי).

.10 נתון הפולינום $m^2 + m + A$, m ו־A מספרים טבעיים. *לכל* ערך של A קיים m גדול ביותר, ש $m^2 + m + A$ יהיה ריבוע שלם מהו הערך הזה של m?

פיתרונות

1 **סכום ספרות סופי**

(א) אם מוסיפים למספר טבעי כלשהו את המספר 9, או את כפולתו, תוספת זאת איננה משנה את סכום הספרות הסופי של המספר המקורי. לדוגמה 39 — סכום ספרות סופי 3 $39+18 = 57$ וסכום ספרות סופי הוא שוב 3. וכך $39+72 = 111$ ושוב סכום ספרות סופי הוא 3

(ב) סכום ספרות סופי של הריבועים של המספרים הטבעיים יכול להיות רק אחד המספרים 9, 7, 4, 1.
לפי זה קל לראות מיד למשל שהמספר 4 9 4 1 3 אינו יכול להיות ריבוע.

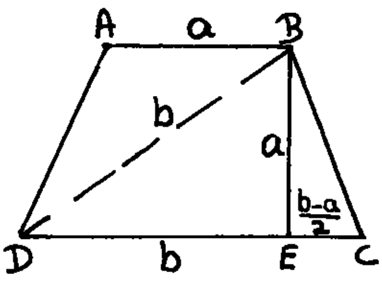
2 **מספרים עיקשים:** מספר קטן מ־100 בעל דרגת עיקשות 4 הוא 77

.3 **מספרים מאושרים**

א. המספר החד ספרתי — 7, $7^2 = 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$

ב. המספר המאושר הקרוב ל־100 הוא 97. רואים לעיל $97 \to 130 \to 10 \to 1$

4) **מהו היחס?**



לפי הנתונים ברור כי $DE^2 + a^2 = b^2$
כלומר

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + a^2 = b^2$$

ומכאן $b^2 + a^2 + 2ab + 4a^2 = 4b^2$

לפיכך $5a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$ אבל אנו מעוניינים רק ביחס a/b. נחלק הכל ב b^2 ונקבל

$$5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$$

למשוואה זו שני פתרונות

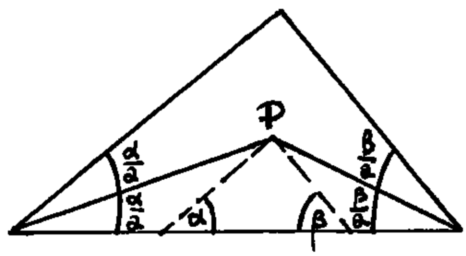
(1) $\frac{a}{b} = -1$

(2) $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$

כמובן במקרה שלנו

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$$

5 **בנייה גיאומטרית:**



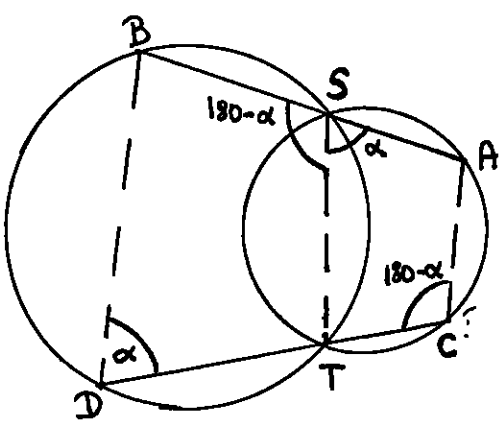
(1) בונים את המשולש לפי בסיס = היקף וזוויות α, β.

(2) מעבירים חוצה זוויות של α ו־β אלה נפגשים ב־P. מ־P מעבירים מקבילים לצלעות המשולש שבנינו.

ההוכחה קלה.

6 **ממרובע למקבילית וממקבילית למלבן:** (I) כאשר מעבירים במלבן את קטעי האמצע של הצלעות השכנות מקבלים מעוין. הסיבה לכך היא כי במלבן האלכסונים שווים (II) אם המרובע הוא מעוין, החוצה של כל זווית חוצה גם את הזווית הנגדית ו"המלבן" הנוצר מתכווץ לנקודה. (III) אם המצולע המקורי הוא ריבוע, גם קטעי האמצעים של הצלעות השכנות יוצרים ריבוע, ואם המצולע המקורי הוא מלבן, החוצים של ארבע הזוויות יוצרים ריבוע.

.7 **על מרובע קמור ותכונותיו:**



עלינו להוכיח כי $BD \parallel AC$ מרובע STCB חסום במעגל לכן סכום כל שתי זוויותיו הנגדיות $180°$ נניח $\angle D = \alpha$ לכן $\angle TSB = 180° - \alpha$. מכאן $\angle TSA = \alpha$ גם SACT מרובע חסום במעגל לכן

$\angle C + \angle TSA = 180°$

לכן $\angle C = 180° - \alpha$ קיבלנו כי $\angle D$ ו־$\angle C$ משלימות ל־$180°$. לכן AC ו־BD נחתכות על ידי CD היוצר זוויות משלימות לכן $BD \parallel AC$.

8) **על תצורות מישוריות:**

א. $(3_2, 3_2)$ מתארת משולש, שכן יש בה 3 נקודות ו־3 ישרים. כל נקודה נמצאת על שני ישרים וכל ישר עובר דרך 2 נקודות.

התצורה $(6_2, 6_2)$ מתארת משושה, שכן יש בה 6 נקודות ו־6 ישרים כל נקודה נמצאת על 2 ישרים וכל ישר עובר דרך שתי נקודות.

ב קיים קשר בין המספרים β, L, α, P

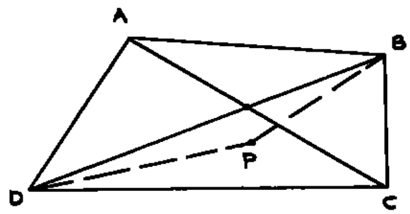
יש L ישרים אשר כל אחד מכיל β נקודות בסך הכל יהיו $\beta \times L$ נקודות

אבל, מכיון שכל נקודה נמצאת על α ישרים ספרנו כל נקודה α פעמים

לפיכך קיים תמיד הקשר $P\alpha = L\beta$

9 יש להקים את בית הספר בנקודת חיתוך האלכסונים.

חיבור כל נקודה פנימית **אחרת** עם 2 קדקודים יוצר משולש עם אחד האלכסונים, ובמשולש זה סכום שתי הצלעות גדול מן האלכסון



10. ה m הגדול הוא A - 1. ואומנם אם נציב במקום m מספר גדול מ־A - 1, התוספת A לא תוכל להשלים את $m^2 + m$ לריבוע הבא שהוא $(m+1)^2$.