פיתרונות של בחינות בגרות תשמ"ח 4 י"ל

1. א. נסמן $CD = a$, h_1 גובה המשולש ODC, h גובה הטרפז, $ED = AB = 3a$, ולכן שטח הטרפז $ABCE$.

$$S = \frac{(EC + AB)h}{2} = \frac{7ah}{2}$$

המשולשים ODC ו AEC דומים. גובה המשולש AEC גם כן h ולכן:

$$h = 4h_1 \Leftarrow \frac{h}{h_1} = \frac{4a}{a} = 4$$

נציב
$$S = \frac{7ah}{2} = \frac{28ah_1}{2}$$

אולם
$$\frac{ah_1}{2} = s \text{, ולכן } S = 28s$$

2 א. משוואת האנך האמצעי ל BC: $y = 2x - 6$

ל AC: $y = -3x + 14$

ב. מרכז המעגל החוסם O הוא מפגש האנכים האמצעיים $O = (4,2)$

ריבוע הרדיוס $OC^2 = (2 - 2)^2 + (4 + 1)^2 = 25$ ולכן משוואת המעגל:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

3. נסמן ב K את קבוצת האינדקסים הזוגיים k שבשבילם הטענה נכונה:

i. $2 \in k$ ואמנם $1 - 3^2 = -2 \cdot 2^2$ הוא פסוק אמת

ii. ניח כי $k \in K$ כלומר,

$$1^2 - 3^2 + 5^2 + . + (2k - 3)^2 - (2k - 1)^2 = -2k^2$$

יש להוכיח כי $k + 2 \in k$ כלומר,

$$1^2 - 3^2 + 5^2 + ... + (2k - 3)^2 - (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 - (2k + 3)^2 = -2(k + 2)^2$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$1^2 - 3^2 + 5^2 + ... + (2k - 3)^2 - (2k - 1)^2 + (2k + 1)^2 - (2k + 3)^2 =$$
$$= -2k^2 + (2k + 1)^2 - (2k + 3)^2 = - 2k^2 + 4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 - 12k - 9 =$$
$$= -2k^2 - 8k - 8 = -2(k + 2)^2$$

4 נסמן ב v את מהירות המשאית לפני התקלה בקמ"ש, וב־t את הזמן המתוכנן בשעות.

זמן הנסיעה לאחר התקלה היה

$$t - 2 - \frac{40}{60} + \frac{25}{60} = t - \frac{9}{4}$$

מערכת המשוואות

$$\begin{cases} vt = 450 \\ 2v + (v+5)\left(t - \frac{9}{4}\right) = 450 \end{cases}$$

והפיתרון $t = 6$, $v = 75$

מכאן מהירות המשאית לפני התקלה 75 קמ"ש.

5 א. $T_n = 2n(n+1)$ (טור חשבוני) ולכן $a_n = 2n^2 + 3n - 3$

ב. בהסתמך על א'

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 3(n+1) - 3 = a_n + 4n + 5$$

אך אפשר גם ישירות מהגדרת הסדרה

$$a_{n+1} = (n+1) - 3 + T_{n+1} = (n+1) - 3 + T_n + 4(n+1) = a_n + 4n + 5$$

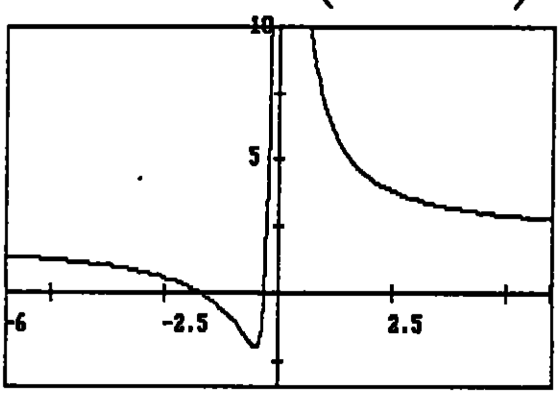
ג $a_{n+1} - a_n = 4n + 5 = 89$

והפיתרון $n = 21$

$a_{22} = 1031$, $a_{21} = 942$

.6 תחום הגדרה $\{x \mid x \neq 0\}$

חיתוך עם הצירים: $\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$



נקודות קיצון. $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ נקודת מינימום

תחומי עליה וירידה.

$\left\{x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ו } x > 0\right\}$ יורדת

$\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 0\right\}$ עולה

אסימפטוטות $x = 0$, $y = 2$.

.7 א. .1 הפונקציה E אינה הפונקציה הקבועה אפס

2 $E(x + y) = E(x)\cdot E(y)$ לכל x ו y.

.3 E פונקציה מונוטונית במובן החלש.

ב על סמך אקסיומה 1 יש c כך ש $E(c) \neq 0$.

$E(c) = E(c + 0) = E(c)\cdot E(0)$.

$E(c) \neq 0$ ולכן $E(0) = 1$

ג $E(x) = E\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{x}{2}\right)\cdot E\left(\frac{x}{2}\right) = \left(E\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

לכן $E(x) \geq 0$. נותר להוכיח כי $E(x) \neq 0$ לכל x.

$$1 = E(0) = E(x + (-x)) = E(x) \cdot E(-x)$$

כלומר, $E(x)$ הוא גורם במכפלה השונה מאפס ולכן אינו יכול להיות אפס.

(הערה: ראה אנליסה כרך שני סעיף 18.5).

8. h- גובה הטרפז.

$$S = \frac{(24 + 2(12 - x))h}{2} = (24 - x)h$$

$$S = (24 - x)\sqrt{144 - (12 - x)^2}$$

$$S' = -\sqrt{144 - (12 - x)^2} + \frac{(12 - x)(24 - x)}{\sqrt{144 - (12 - x)^2}}$$

$$S' = \frac{2x^2 - 60x + 288}{\sqrt{144 - (12 - x)^2}}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 6$. בדיקה פשוטה (גזירת המונה) מראה כי בנקודה זו מקסימום מקומי. מכיוון שהפונקציה S מוגדרת בתחום $0 < x < 12$ וגזירה בתחום זה, המקסימום הוא מוחלט.

9. א. $S = \frac{5a^2}{4} \text{ctg} 36°$

ב. נסמן את הזווית בין המקצוע הצדדי לבסיס ב α.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\sin 36°}.$$

לכן. $\alpha = 31.7°$

12. א. נרשום את ההצגות הפרמטריות של ℓ_1 ו ℓ_1

ℓ_1: $(x,y,z) = (-1,1,-3) + t(-3,2,1)$

ℓ_2: $(x,y,z) = (1,2,2) + s(1,-3,,3)$

כדי לבדוק אם הישרים נחתכים נתיר את המערכת

$$\begin{cases} -1 - 3t = 1 + s \\ 1 + 2t = 2 - 3s \\ -3 + t = 2 + 3s \end{cases}$$

קבוצת האמת של מערכת זו ריקה, ולכן הישרים מצטלבים.

ב. הוקטור $\overline{DC} = (1,-3,3)$ נמצא על ישר מקביל ל ℓ_2 המישור $9x + 10y + 7z = 0$ π'
עובר דרך הראשית ומקביל למישור $9x + 10y + 7z + 20 = 0$:π. בדיקה פשוטה מראה
כי $(1,-3,3)$ נמצא על π', ולכן ℓ_2 מקביל ל π.
אנו מסתמכים על הטענה הבאה מסטריאומטריה:
אם $\pi' \parallel \ell'$ (ℓ' ישר ו π' מישור) ואם $\ell \parallel \ell'$ ו $\pi \parallel \pi'$ אז $\ell \parallel \pi$

ג. המרחק מ D למישור הוא גם המרחק המבוקש

$$d = \left|\frac{9\cdot 0 + 10\cdot 5 + 7\cdot(-1)}{\sqrt{9^2 + 10^2 + 7^2}}\right| = \frac{43}{\sqrt{230}}$$

13. א

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{4}(\underline{u}-\underline{w}+\underline{v}-\underline{w}) = \frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v})$$

ב. $\overrightarrow{MN}$ שווה לוקטור הנמצא במישור ABC, ולכן הישר MN מקביל לישר במישור ABC,
כלומר מקביל למישור

ג $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\underline{v}+\underline{u})\cdot(\underline{v}-\underline{u}) = \frac{1}{4}(\underline{v}^2-\underline{u}^2) = 0$ ולכן $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BC}$.

14 א. $E(x) = 5\cdot 10^4\cdot 1.15^x$

אם $E(x) = 10^7$ נקבל את המשוואה

$$10^7 = 5\cdot 10^4\cdot 1.15^x$$

$$1.15^x = -\frac{10^3}{3}$$

$$x = \frac{3 - \log 5}{\log 1.15} = 37.91$$

ב. תחום ההגדרה: $\{x|\ x \neq 0\}$

$$\left(\frac{x}{\ell n x^2}\right)' = \frac{\ell n x^2 - 2}{(\ell n x^2)^2} = \frac{\ell n\,|x| - 1}{2\ell n^2\,|x|}$$

$\left(e, \frac{e}{2}\right)$ מינימום, $\left(-e, -\frac{e}{2}\right)$ מקסימום

15. נקודות החיתוך $(0, 0)$, $(2, 8)$
משוואת הישר OM: $y = 4x$

$$S_1 = \int_0^2 \left(\sqrt{32x} - 4x\right)dx = \frac{8}{3}$$

$$S_1 = \int_0^2 (4x - x^3)dx = 4$$

$$S_1:S_2 = \frac{8}{3}:4 = 2:3$$