# פיתרונות של בחינות בגרות תשמ"ח 5 י"ל

1 א. נסמן $CD = a$, $h_1$- גובה המשולש ODC, $h$- גובה הטרפז.

$ED = AB = ma$

ולכן שטח הטרפז ABCE:

$$S = \frac{(EC+AB)h}{2} = \frac{(2ma+a)h}{2} = \frac{(2m+1)ah}{2}$$

המשולשים ODC ו AEC דומים ולכן

$$\frac{h}{h_1} = \frac{ma+a}{a} = m+1 \Rightarrow h = h_1(m+1)$$

נציב. $$S = \frac{(2m+1)(m+1)h_1 a}{2} = (2m+1)(m+1)s$$

ב. $28s = (2m+1)(m+1)s$

או $2m^2 + 3m - 27 = 0$

הפיתרון החיובי $m = 3$

2. א.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & -5 & 10 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[s_3+(-5)s_1]{s_2+(-2)s_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -15 & 15 & k-25 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3+(-3)s_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & k-10 \end{pmatrix}.$$

ולכן כאשר $k = 10$ אין־סוף פיתרונות.

ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}s_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s_3+(-2)s_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן בשביל $k = 10$ המערכת המקורית שקולה למערכת

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

וקבוצת האמת

$$\left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \right\}$$

ג. נציב ב־בי $t = 0$ ו $t = 1$ ונקבל $(3,1,0)$, $(2,2,1)$ פיתרונות כאשר $k = 10$

3. א. $n = 3$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} > \frac{3}{5}+\frac{1}{3}$$

ב. נסמן ב K את קבוצת כל האינדקסים הגדולים מ 2 שבשבילם הטענה נכונה.

i. ראינו כי $3 \in K$.

ii. נניח כי $k \in K$ כלומר,

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k} > \frac{3}{5}+\frac{1}{k}$$

יש להוכיח כי $k+1 \in K$ כלומר,

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)} > \frac{3}{5}+\frac{1}{k+1}$$

נשתמש בהנחת האינדוקציה:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2} =$$

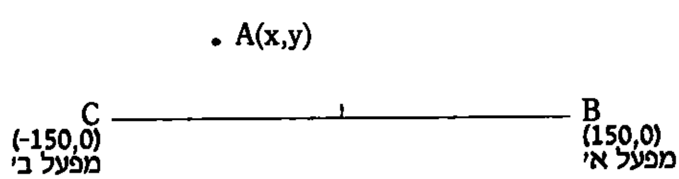
$$= \frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k} >$$

$$> \frac{3}{5}+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k} = \frac{3}{5}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

כדי לסיים את ההוכחה מספיק להראות כי $\frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2(k+1)}$

אך זה מובן, כי $2(k+1) > 2k+1$.

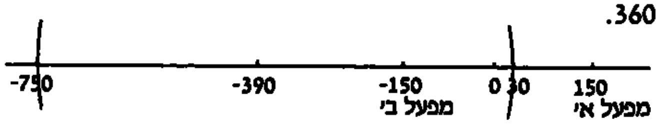
4 א




$$20\overline{AB} = 30\overline{AC}$$

$$20\sqrt{(x-150)^2+y^2} = 30\sqrt{(x+150)^2+y^2}$$

לאחר העלאה בריבוע ופישוט מקבלים $x^2 + y^2 + 780x + 22500 = 0$ או.
$(x + 390)^2 + y^2 = 360^2$ כלומר, המקום הגיאומטרי הוא מעגל (אפולוניוס) שמרכזו (0, -390) ורדיוסו 360.




הלקוחות הגרים בתוך המעגל יעדיפו לקנות את המוצר ממפעל ב׳, ואילו הלקוחות הגרים מחוץ למעגל יעדיפו את המוצר ממפעל א׳

5. לסעיפים א׳ ו ב׳ ראה שאלה 5 ב 4 י״ל (להחליף $T_4$ ב $R_4$)

ג. $S = a_2 + a_4 + a_6 + .... + a_{100}$

$T = a_1 + a_3 + a_5 + ..... + a_{99}$

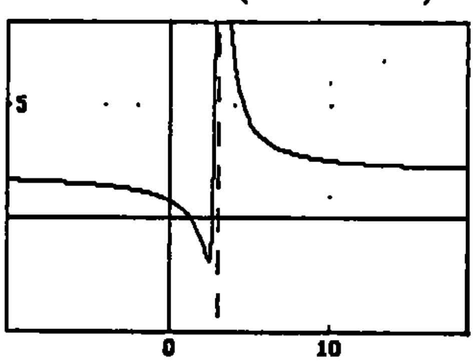
$$S - T = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + .... + (a_{100} - a_{99})$$

זהו טור שמכיל 50 איברים כאשר איברו הכללי נתון ע״י תבנית הנסיגה: $a_{n+1} - a_n = 4n + 5$. הטור החדש הוא לכן חשבוני, כאשר האיבר הראשון הוא: $a_2 - a_1 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$, ואיברו האחרון $a_{100} - a_{99} = 4 \cdot 99 + 5 = 401$. לכן:

$$S - T = \frac{(9 + 401)50}{2} = 10250$$

6. תחום הגדרה: $\{x \mid x \neq 3\}$

חיתוך עם הצירים $\left(0, \frac{7}{9}\right)$ , $\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ , $\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$




נקודות קיצון (2.5,-2) מינימום

עליה וירידה $\{x \mid 2.5 < x < 3\}$ עולה

$\{x \mid x < 2.5$ וגם $x > 3\}$ יורדת

אסימפטוטות $x = 3$, $y = 2$

7. ראה שאלה 8 ב 4 יח׳
השטח המקסימלי הוא $108\sqrt{3}$

8 א. $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$b\sin\alpha = a\sin\beta$

$b\sin(60 + \beta) = a\sin\beta$

$b(\sin 60 \cos\beta + \cos 60 \sin\beta) = a\sin\beta$

נחלק ב $\cos\beta$

$a\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\beta + b\frac{\sqrt{3}}{2}$ , ולכן $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}}{2a-b}$.

ב. מהנתון, $a > b$ ולכן $\frac{a}{b} > 1$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+60)}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos60 + \cos\beta\sin60}{\sin\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\beta$$

$45 < \beta < 90$, הקוטנגס פונקציה יורדת, ולכן $\operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}45 = 1$

לכן $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\beta < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

ג. ראינו בסעיף ב' $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\beta$

נציב $\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\beta$

ולכן $\operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{3\sqrt{3}}$

$$\beta = 46.1^\circ \quad , \quad \alpha = 106.1^\circ \quad , \quad \gamma = 27.8^\circ$$

לכן על־פי משפט הסינוס, אם נסמן את חוצה הזווית $\alpha$ ב $\ell$

$$\frac{\ell}{\sin27.8} = \frac{b}{\sin80.8}$$

ולכן $\ell = \frac{b\cdot\sin27.8}{\sin80.8} = 0.47b$

9 א $\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ מקסימום מקומי ומוחלט

$\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{6}\pi\right)$ מינימום מקומי

$(0,0)$ מינימום מוחלט

ב. $f(-x) = \frac{1}{2}\sin(-2x) + \sqrt{3}\sin(-x) + (-x) = -\left(\frac{1}{2}\sin2x + \sqrt{3}\sin x + x\right) = -f(x)$

ולכן $f$ אי זוגית.

ג. מכיוון ש $f$ אי זוגית הגרף בתחום $(-\pi,0)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה ביחס לראשית בתחום $(0,\pi)$ ולכן:

$\left(-\frac{\pi}{2}, -\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ מינימום מקומי ומוחלט

$\left(-\frac{5\pi}{6}, -\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ מקסימום מקומי.

$(0,0)$ מקסימום מוחלט

ד. מהסעיפים הקודמים נובע כי $f$ חותך את ציר ה x בתחום $-\pi < x < \pi$ רק בראשית נניח לכן כי $x > \pi$ או $x < -\pi$ מתקיים.

$$-\pi < -\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right) \le \frac{1}{2}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x \le \frac{1}{2}+\sqrt{3} < \pi$$

ולכן כאשר $x > \pi$ או $x < -\pi$ $\quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x\right) + x$ לא יתאפס.

10. א. תהי E נקודה על המישור $\pi$ כך ש $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$ במקרה זה הישר CD מקביל ל AE, ולכן למישור $\pi$ הנקבע ע"י הנקודות E,B,A. תהי $E = (x, y, z)$, אזי $(x+1, y-1, z+3) = (-1, 3, -3)$ ולכן $E = (-2, 4, -6)$.

הצגה פרמטרית של $\pi$ היא:

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE}$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, -3) + t(-3, 2, 1) + s(-1, 3, -3)$$

ובפירוט

$$\begin{cases} x = -1 - 3t - s \\ y = 1 + 2t + 3s \\ z = -3 + t - 3s \end{cases}$$

ב. תהי $ax + by + cz = d$ משוואת המישור הנקודות E, B, A נמצאות עליו לכן

$$\begin{cases} -a + b - 3c = d \\ -4a + 3b - 2c = d \\ -2a + 4b - 6c = d \end{cases}$$

זוהי מערכת של 3 משוואות ב 4 משתנים משוואת המישור. $9x + 10y + 7z = -20$.

ג המרחק מ D למישור הוא גם המרחק מ $\ell_2$ למישור. המרחק המבוקש הוא לכן:

$$\left| \frac{9\cdot 0 + 10\cdot 5 + 7(-1) + 20}{\sqrt{9^2+10^2+7^2}} \right| = \frac{63}{\sqrt{230}}$$

11 א. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MD} + t(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) =$

$$= \frac{1}{2}\underline{w} + t(\underline{u} - \underline{w} + \underline{v} - \underline{w}) =$$

$$= t\underline{u} + t\underline{v} + \left(\frac{1}{2} - 2t\right)\underline{w}$$

ב. $t = \frac{1}{4}$. במקרה זה $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v})$

ג $\frac{1}{2}(\underline{v}^2-\underline{u}^2) = \left(\frac{1}{4}(\underline{u}+\underline{v}), \underline{v}-\underline{u}\right) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}) = 0$, כלומר $|\underline{u}| = |\underline{v}|$

12 א

$$z^2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right)$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)\right)$$

ולכן הפיתרונות

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

ב.

$$z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

נסמן ב $z_B$ ו $z_C$ את שני הקדקודים האחרים

$$|z_C| = |z_C| = \sqrt{2}$$

$$\arg z_A - \arg z_B = \frac{2}{3}\pi$$

$$\arg z_A - \arg z_C = -\frac{2}{3}\pi$$

ולכן

$$\arg z_B = \frac{5}{4}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{12}\pi$$

$$\arg z_C = \frac{5}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{23}{12}\pi$$

$$z_B = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$z_C = \sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$$

.13 א. i. $E(x)$ אינה מתאפסת בשביל כל x (משפט), ולכן כך גם $F(x) = \frac{1}{E(4x)}$ כלומר, $F(x)$ מוגדרת היטב ואינה הפונקציה הקבועה אפס.

ii. $F(x+y) = \frac{1}{E(4(x+y))} = \frac{1}{E(4x+4y)} = \frac{1}{E(4x)} \cdot \frac{1}{E(4y)} = F(x)F(y)$

iii. יהי $x \geq y$ ולכן $4x \geq 4y$.

$E(x)$ מונוטונית במובן החלש. ולכן אם $E(4x) \geq E(4y)$ אזי $F(x) = \frac{1}{E(4y)} \leq \frac{1}{E(4y)} = F(y)$, כלומר במקרה זה $F(x) \leq F(y)$.

בצורה דומה אם $E(4x) \leq E(4y)$ אזי $F(x) \geq F(y)$

ב. נבחין בשני מקרים

א. $0 < \frac{x}{1-x} < 1$ , ואז $x+4 > 5-3x$

ב $\frac{x}{1-x} > 1$ , ואז $x+4 < 5-3x$

התרת מקרה א

$$\frac{x}{1-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} < 0 \Leftrightarrow (2x-1)(1-x) < 0$$

ולכן קבוצת האמת של אי־שוויון זה היא $\left\{x|\ x < \frac{1}{2} \ v\ x > 1\right\}$

$$\frac{x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0$$

וקבוצת האמת $\left\{x|\ 0 < x < 1\right\}$.

קבוצת האמת של אי־השוויון $x+4 > 5-3x$ היא $\left\{x|\ x > \frac{1}{4}\right\}$

הפיתרון במקרה א׳ הוא המשותף של שלוש הקבוצות שקיבלנו לעיל זוהי הקבוצה·

$$\left\{x|\ \frac{1}{2} < x < \frac{1}{4}\right\}$$

הפיתרון במקרה ב הוא הקבוצה הריקה

14. א. $S(5) = 1 \cdot e^{-c5} = 0.7$

ולכן $c = -\frac{1}{5}\ell_n 0.7 \Leftrightarrow -5c = \ell_n 0.7$

$e^{-cx} = 0\ 3$

ולכן $-cx = \ell_n 0.3$

נציב את c

$$x = \frac{5\ell_n 0.3}{\ell_n 0.7} = 16.88 \Leftrightarrow -\frac{x}{5}\ell_n 0.7 = \ell_n 0.3$$

ב. תחום ההגדרה $\left\{x|\ x \neq 0\right\}$

נקודות קיצון $\left(e, \frac{e}{4}\right)$ מינימום, $\left(-e, -\frac{e}{4}\right)$ מקסימום.

15 א. $ax = x^3$

$x = 0, x = \sqrt{a}$ ולכן $M = (\sqrt{a}, a\sqrt{a})$

$y^2 = bx$ עובר דרך M, לכן $b\sqrt{a} = \left(a\sqrt{a}\right)^2$ , ומכאן $b = a^2\sqrt{a}$.

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{a}} (ax-x^3)dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{4}$$

$$S_2 = \int_0^{\sqrt{a}} \left(\sqrt{b}\sqrt{x} - ax\right)dx = \left[\frac{2\sqrt{b}\,x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a}} =$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{bx}}{3} - \frac{ax^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a}} =$$

$$= \left(\frac{2a\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}{3} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{6}$$

ולכן $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$

ג. יהי v נפח החרוט שמתקבל מסיבוב OM סביב ציר ה x (O הראשית)

$$v = \frac{\pi\left(a\sqrt{a}\right)^2\sqrt{a}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{a}}{3}$$

$$v_1 = v - \pi\int_0^{\sqrt{a}} x^b dx = v - \pi\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{\pi a^3\sqrt{a}}{3} - \frac{\pi a^3\sqrt{a}}{7} = \frac{4\pi a^3\sqrt{a}}{21}$$

$$v_2 = \pi\int_0^{\sqrt{a}} bx dx - v = \pi\left[\frac{bx^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a}} - v =$$

$$= \frac{\pi ba}{2} - v = \frac{\pi a\sqrt{a}}{2} - \frac{\pi a^3\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{6}\pi a^3\sqrt{a}$$

לכן. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{4.6}{21} = \frac{8}{7}$