חוקי האנדרלמוסיה*

מאת **יששכר אונא****

פילוסופוס אחד שאל את רבן גמליאל, אמר לו "צַיָר גדול הוא אלוהיכם אלא שמצא סממנים טובים שסִיְעו אותו" אמר לו "ומה הס?" אמר לו "תוהו ובוהו וחושך ומים ורוח ותהומות" אמר לו "תפח רוחו של אותו האיש, כולם נאמר בהם בריאה"

(בראשית רבה א)

בשנים אלו עובר מדע הפיסיקה מהפכה אדירה' מִלַת־המפתח היא כָאוס (chaos) דהיינו אי־סדר, תוהו ובוהו, אנדרלמוסיה הנושא, אשר עוד לפני עשר שנים היה מוקצה מחמת מיאוס, הופך תוך שנים מעטות ביותר לתחום מרכזי במחקר הפיסיקלי חוקי האנדרלמוסיה ישתלטו, קרוב לְוַדאי, על המחקר העיוני (וגם הניסויי) במדעים המדוּיָקים תוך שנים מעטות, עד כדי העמדתם בָצֵל, של רוב הנושאים שבחזית המחקר כיום

במאמר זה ננסה להבין מה קרה כיצד ניתן להבין שאין סתירה בין "חוקים" ל"אנדרלמוסיה" כיצד התגלו חוקים אלה ומהי משמעותם' מהי חשיבותם של חוקי האנדרלמוסיה בשטחים שונים של הפיסיקה' ומהי חשיבותם בתחומי חיים אחרים בביולוגיה של אוכלוסיות, במטאורולוגיה, בכלכלה'

חוק מהו?

איזק ניוטון, באמצעות חוקיו הפשוטים, השולטים בגרמי שמיים ובפירות נושרים, נטע בנו אמון עיוור בכוחה של הפיסיקה לנבא בדִיקָנות את מסלוליהם ומהירויותיהם של גופים כל שדרוש הוא ידיעת מקומותיהם ומהירויותיהם ברגע מסוים בעבר (או בהווה) ואז, שימוש בנוסחה — שהיא הביטוי המתמטי של החוק המתאים — ייתן את התוצאה

נניח, למשל, גוף שכל כוח אינו פועל עליו לפי ניוטון, הוא בעל מהירות קבועה, v (מטרים בכל שניָה) אם בזמן מסוים (שעת־חצות 00 00, למשל) מקומו היה x_0 (מטרים מכיכר־העיר), כעבור שניה אחת יהיה מקומו x_1 (מטרים מאותה כיכר) לפי הנוסחה

$$x_1 = x_0 + v$$

כעבור עוד שניה יהיה $x_2 = x_1 + v$

בשעה 00 $(n + 1)$ (דהיינו, כעבור $n + 1$ שניות) יהיה מקומו

$$x_{n+1} = x_n + v \qquad (1)$$

זהו חוק פשוט ודטרמיניסטי באופן מושלם ידיעת x_0 ו־v (בשעת חצות) מאפשרים חישוב מקומו של הגוף בכל שניה בעתיד (ואף בעבר) בכנה ניסחנו את החוק כנוסחת רקורסיה (נסיגה), אולם קל לנסחו בצורה מפורשת מקומו של הגוף כעבור n שניות הוא

$$x_n = x_0 + nv \qquad (2)$$

הניסוח של משוָאה (1) ידוע כמשוָאה הדיפרנציאלית, המתארת את תנועת־הגוף משוָאה (2) היא הפיתרון המפורש של המשוָאה הדיפרנציאלית הן שקולות לחלוטין זו לזו

נביא עוד דוגמה של חוק דטרמיניסטי נניח שבאי פלוני מתרבה אוכלוסיה של חרק מסוים כך שכעבור שנה מוכפל מספר החרקים פי שניים כעבור שנתיים מספרם יהיה פי ארבעה וכן הלאה אם ידוע שמספר החרקים בשנה מסוימת (1980, למשל) היה x_0 הרי כעבור שנה יהיה מספרם x_1

$$x_1 = 2x_0$$

כעבור שנתיים

$$x_2 = 2x_1$$

וכן הלאה, בשנה $n + 1$

$$x_{n+1} = 2x_n \qquad (3)$$

* המאמר לקוח מתוך "מדע — עיתון מדעי לכלי", חוברת ל"ב/1 (1988) ומתפרסם באדיבות מערכת "מדע" כל הזכויות שמורות למערכת "מדע" המאמר מובא כאן כלשונו

** יששכר אונא (I Unna) הוא פרופסור־חבר במכון רקח לפיסיקה ויו"ר החוג לפיסיקה באוניברסיטה העברית את תואר הדוקטור קיבל מטעמה ומטעם מכון ויצמן למדע תחומי־עיסוקו הם הפיסיקה של גרעין האטום ותורת־הקונטים

מרגע שנודע לנו מספר התרקים בשנה מסוימת (1980) וגורם ההכפלה (2, בדוגמתנו) נדע את מספר התרקים בכל שנה בעתיד (ובעבר) צורתו המפורשת של החוק

(4) $$x_n = 2^n x'_0$$

למשל בשנת 1988 יהיה מספר התרקים גדול פי 256 מאשר בשנת 1980 ($2^8 = 256$)

(4) $$x_{1988} = 256x_{1980}$$

אי־סדר קלַסי

בפיסיקה הקלַסית הופיעו תופעות לא־מסודרות כאשר דובר במספר רב של גופים שכל אחד מהם כפוף לשלטונם של חוקים דטרמיניסטיים (חוקי ניוטון, מַכסוול) בתוך בלון הממולא גַז הליום, למשל, יש כ־10^{23} (מאה אלף מיליַרד מיליַרדים) אטומי הליום ברור שאין כל טעם, ואף אין כל אפשרות מעשית, למנות אחד לאחד את מהירויותיהם ומקומותיהם של האטומים ברגע מסוים

כדי לטפל במערכות כאלו של גופים רבים נוצרה המכניקה הסטטיסטית ואמנם לכל הצרכים המעשיים די לדעת את הערכים הממוצעים וההתפלגויות הסטטיסטיות של תכונות שונות כגון צפיפות, אנרגיה (טמפרטורה) ולחץ

האנדרלמוסיה השוררת בגז ההליום איננה תוצאה של חוק(ים), היא נובעת מכך, שמלכתחילה קיבלנו מספר עצום של אטומים, מפוזרים בנקודות שונות, ובעלי מהירויות שונות בכיוונים שונים השימוש בתורת ההסתברות ובשיטות סטטיסטיות נבע מכך שהידע ההתחלתי שבידינו היה מוגבל אולם אפילו היינו זוכים לקבל ידע זה במדויק לא היה זה מעשי ולא היתה כל תועלת בחישוב מדויק של 10^{23} מסלולים אטומיים

תופעות של זרימה מסודרת ומעורבלת

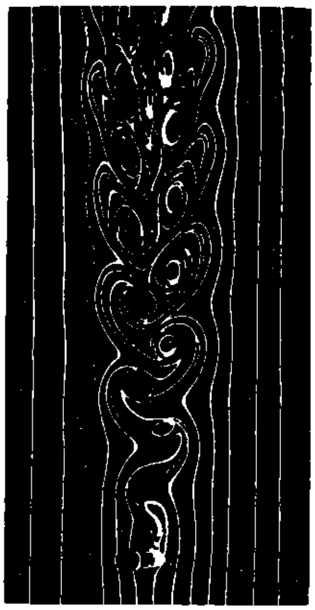
אחד המפגשים הראשונים של הפיסיקה ה״תקנית״ עם תופעה של אי־סדר קשור לתחום ההידרודינמיקה — תורת הזרימה של נוזלים (תמונה 1) ידוע לכול, שזרימה של נוזלים או גַזים מציַתת לחוקים פשוטים ומוכרים היטב — חוקי ברנולי אך דא עקא, חוקים אלה נכונים רק כל עוד מהירות־הזרימה של הנוזל או הגַז ביחס לצינור וביחס לגופים מוצקים שבדרכו אינה גבוהה לכל נוזל יש מהירות־זרימה קריטית שמעליה מתגלות תופעות של מערבלים — הנוזל מתחיל ״להתפרע״, הסדר ההידרודינמי מופר מרגע זה ואילך — פג כוחם של החוקים עד לשנים האחרונות עמדו הפיסיקאים העיוניים אובדי עצות מול תופעות אלו תופעת המעַרבָלים (טורבולנטיות) — מופיעה בכל זרימה, מרגע שזו עוברת את המהירות הקריטית נראה שהניסויים כפופים לַחוק נסתר חוק המכתיב את המעבר מסדר לאי־סדר אך הקשיים המתמטיים הכרוכים בחישובים של תופעות אלו ריפו את הידיים

תופעות לינאריות ולא־לינאריות

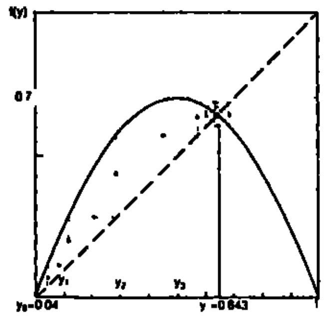
הסיבה לקשיים שמנינו נעוצה בכך שהמשוָאות השולטות בתופעת המערבלים הן **לא־לינאריות** המשוָאות שדנו בהן עד־עתה וכל המשוָאות המיַצגות חוקים פיסיקליים מוכרים שנחקרו עד לאחרונה היו משוָאות לינאריות הפיסיקה הקלַסית והפיסיקה המודרנית עסקו בתופעות לינאריות

המשוָאה הלינארית מצטיַנת בתכונה הבאה אם יש לה שני פתרונות אפשריים שונים יהיה גם סכומם של הפתרונות פתרון אפשרי משוָאות לינאריות זכו לטיפול מתמטי מקיף ויסודי במשך מאות שנים אין זה מפתיע, איפוא, שהפיסיקאים עסקו מאות בשנים בתופעות שניתן לתארן באמצעות משוָאות כאלו בלבד וכאלה הם חוקי־ניוטון, ברנולי ומכסוול, כאלו הן גם המשוָאות השולטות במכניקת הקוַנטים הפיסיקאים פשוט חפשו את הצלחתם ״מתחת לפנסי״ ״יודעים אנו״, כך אמרו, ״לפתור משוָאות לינאריות לפיכך נעסוק בתופעות לינאריות״ למזלם, השכילו למצוא מגוָן רחב ומעניין של תופעות כאלו תנועתם של כוכבי־הלכת, התקדמותם של גלים אלקטרומגנטיים, התנהגות האלקטרונים באטום ועוד

לעומת־זאת — משוָאות שאינן לינאריות קשות מאוד לפתרון הידע המתמטי עליהן מועט, יחסית, והן טומנות בחובן חידות והפתעות על־כל צעד ושעל עם־זאת ברור היום לכול תופעות הטבע הן רובן ככולן —

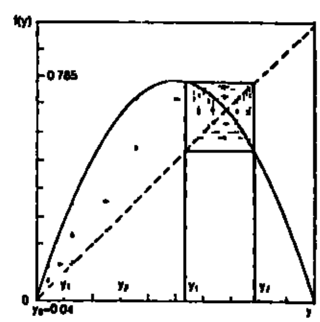


תמונה 1 שלַבי המעבר מזרימה מסודרת (למטה) לזרימה עם מערבלים (למעלה)



תמונה 2 התפתחותה של אוכלוסיַת חרקים נשלטת על־ידי נוסחת הנסיגה $y_{n+1} = Ry_n(1 - y_n)$ y_n הוא המספר היחסי של החרקים בשנה ה n R הוא קבוע־ההתרבות בתמונה R = 2 8 והאוכלוסיה ההתחלתית מיוצגת במספר היחסי $y_0 = 0\ 04$ הפרבולה מתארת את הפונקציה $f(y) = 2\ 8y(1 - y)$ הקו הישר האלכסוני מתאר את הפונקציה $f(y) = y$ תהליך ההתפתחות של ערכי y_n מ n = 0 ועד לערכי n גבוהים מתואר באמצעות המסלול המדורג המסומן בחיצים בדוגמה זו יש נקודת־משיכה (attractor) שערכה $y = 9/14 = 0\ 643$

תמונה 3 התפתחותה של אוכלסיַת־חרקים כבתמונה 2 בתמונה זו הפונקציות והתהליך כבתמונה 2 ואילו ערך קבוע ההתרבות הוא R = 3 14 במקרה זה אין נקודת־משיכה בודדת אלא "מחזור" של שתי נקודות משיכה y_2^*, y_1^*



תופעות לא־לינאריות' המשוָאות הלינאריות הן קירוב היום עומדים אנו ומשתאים איך קרה הנסי כיצד השכלנו לעסוק דוקא בתופעות יוצאות־הדופן הכמו־לינאריות'

המהפך של עידן המחשב

מה נשתנה בעשור האחרון' נוסף לאדם כלי־מחקר חדש ואדיר — המחשב רב־העוצמה' וכך החילונו לחקור את המרחבים העצומים הלא־נודעים של תופעות לא־לינאריות

המחשב הוא לנו כיום מה שהיתה האוניה למַגלן כאשר חקר וגילה את מרחבי האוקיאנוסים ודרכי־הים הלא־נודעות בפתחה של המאה ה־16 המחשב הופך בידינו כלי רב־עוצמה כמו הטלסקופ בידי גלילאו וכל האסטרונומים שבאו אחריו במחקר מרחבי־היקום, או מאיצי־החלקיקים אדירי־האנרגיה בחקר נבכי מרכיבי־היסוד של החומר

הטיפול במשואות הלא־לינאריות הוא סוג חדש לחלוטין של מתמטיקה מתמטיקה ניסויית מפעילים את המחשב לחיפוש פתרונות ומגלים תופעות חדשות ומדהימות ובראשן חוקי האנדרלמוסיה

משוָאה לא־לינארית: דוגמה פשוטה ועתירת־הפתעות

נחזור אל דוגמַת החרקים המתרבים נניח שגורם ההתרבות משנה לשנה הוא R (בדוגמה שלמעלה הנחנו R = 2) אולם הפעם נוסיף ונניח שהצפיפות הגדלה באוכלוסיה גורמת לפחת מסוים (לדוגמה אם חרק נכנס לתחומו של חרק אחר מתפתח קרב שבסופו מאַבד אחד החרקים את חייו) הנוסחה המקבילה לנוסחה (3) תהיה

$$x_{n+1} = Rx_n - Sx_n^2 \qquad (5)$$

פה R הוא קבוע־ההתרבות והוא מופיע באיבר הלינארי S הוא קבוע חדש האומר באיזו מידה תפחת האוכלוסיה בכל שנה כתוצאה מצפיפותה, מטבע־הדברים יהיה זה מספר קטן ביותר (למשל מיליונית $S = 10^{-6}$) לכאורה, נוסף תיקון זעיר למשוָאת התרבות האוכלוסיה לאמיתו של דבר **הפכה משוָאת ההתרבות למשוָאה לא־לינארית** התוצאות הן ממש מדהימות' הן מעידות על־כך שכולנו — ובכלל־זה מתימטיקאים ופיסיקאים — היינו בורים ואנאלפבתים גמורים בכל הנוגע למשוָאות לא־לינאריות ורק עתה חלה ההתפכחות

הסתכלות ראשונה במשוָאה (5) מגלה כי אם אוכלוסיה בשנה כלשהי אינה פחותה מ־R/S, היא תעלם תוך שנה למשל, אם R = 2 ו־$S = 10^{-6}$ הרי אוכלוסיה של שני מיליון חרקים או יותר תעלם לחלוטין תוך שנה (הרי לכם שיטה להיפטר מהחרקים באי להביא אספקה גדולה מן החוץ כך שהם ישמידו את עצמם לחלוטין) לשם הפשטות נבחר קנה־מידה חדש נמדוד את גודל האוכלוסיה ביחס לאוכלוסיה המירבית נגדיר

$$y_n = (S/R)x_n \qquad (6)$$

כך, למשל, בדוגמתנו אוכלוסיה של $x_n = 10^6$ (דהינו מיליון חרקים בשנה n) תיתן $y_n = ½$ והמשוואה (5) תהיה

$$y_{n+1} = Ry_n(1 - y_n) \qquad (7)$$

משוָאה זו (תמונה 2) מלאת הפתעות' ברור, כי אם $y_0 = 0$, האוכלוסיה תשאר 0 לעולם ועד אך ברור, כי גם $y_0 = 1$ יוביל לאוכלוסיה 0, החל מן השנה השניה ולתמיד מה קורה אם הערך ההתחלתי, y_0, של האוכלוסיה נמצא בין 0 ל־1' קודם־כול, ניתן להיוָכח מיָד, כי ערכי y_n (פרט לערך ההתחלתי) לעולם לא יעלו מעל הערך המרַבי R/4, בניגוד בולט לתהליך הלינארי

אם R אינו עולה על 1 האוכלוסיה תלך ותפחת משנה לשנה עד שתעלם לעומת־זאת, אם R גדול מ־1, תלך האוכלוסיה ותתיַצב תוך שנים מעטות וערכה יהיה

$$y^* = 1 - 1/R \qquad (8)$$

למשל אם מקדם ההתרבות, R, הוא 2 5 ("אינפלציה" של 150%), תלך האוכלוסיה ותתיַצב על הערך $y^* = 3/5$, ערך נמוך במקצת מן הערך המרַבי אליו יכולה להגיע האוכלוסיה, שהוא 5/8 (אם $S = 10^{-6}$ הרי האוכלוסיה תתיצב על $x^* = 3/5 \cdot R/S$ כלומר 1 5 מיליון)

הרי לנו כאן תכונה מעניינת וטיפוסית למשוָאות לא־לינאריות רבות הן "מושכות"

(מתמקדות על, מתנקזות אל) לנקודה קבועה, מסוימת, y^*, שהיא נקודת־משיכה יציבה אולם, עלינו להיזהרי תופעה זו נכונה כל־עוד מקדם ההתרבות, R, קטן מ־3י למה דוקא 3י לאלוהי המשוַאות הלא־לינאריות פתרונים׳

אך מה קורה כאשר R גדול מ־3 (תמונה 3)׳ כאן מחכה לנו הפתעה נוספת **האוכלוסיה איננה מתיַצבת עוד לערך מסוּים** היא ״תתנודד״ בין שני ערכים, שנה אחת ״טובה״ ושנה אחת ״גרועה״, שוב שנה ״טובה״ ושוב שנה גרועה, וחוזר־חלילה, לעולם ועד (האם גידולי התבואה במצרים בתקופתו של יוסף הצדיק היו כפופים למשוַאה לא־לינארית׳) האם זהו סוף הסיפור׳ כלל וכלל לאי כאשר R מגיע לערך $R = 1 + \sqrt{6} = 3\ 4495$ מקבלים מחזור התיצבות של ארבעה ערכים שונים ושוב, גידול נוסף פעוט, בערך של R ייתן פיצול של מחזור היציבות ל־8 ערכים, 16 ערכים וכן הלאה עד לערך $R = 3\ 5699$. בערך זה, שהתגלה בדרך הניסויית, נסמנו R_c, קורה לראשונה מצב שבו עבור ערכי y_0 מסוּיָמים המערכת לא תתיַצב כללי הערכים בשנים שלאחר מכן יקפצו בצורה בלתי־מבוקרת ובלתי־צפויה, בכל שנה ושנה המצב הבלתי מבוקר הזה הולך ו״מחמיר״ עד לערך $R = 4$ אשר בו כמעט לכל ערכי y_0 קימת אנדרלמוסיה מושלמת הערכים של y_n מְקַפְּצים ללא כל סדר מערך לערך ממש כאילו היו תוצאות במשחק רולטה, שלא זוּיפה (תמונה 4)
אך יש לשים לב לכך אנדרלמוסיה מושלמת זו היא תוצאה של חוק־טבע פשוט ודטרמיניסטי משוַאה (5)׳

אנדרלמוסיה מהי?

לפנינו שאלה קשה ביותרי זה שנים היא מעסיקה מתמטיקאים רציניים היא קשורה לשאלת הסיבוכיות (קומפלכסיות) והמיקריות (רנדומיות) זהו תחום מרַתק כשלעצמו אנו נאלץ להסתפק ברמזים

ניתן לומר, שסדרה של מספרים היא חסרת כל סדר אם אין כל אפשרות לתארה באמצעות תוכנית (אלגוריתם) שאורכה קטן מאורך הסדרה חַיָּבים אנו להעיר, שהמילים ״אין כל אפשרות״ הן בעיַתיות ביותר יש איפוא להסתפק בהגדרה סוביקטיוית יותר ״אין אָנו מכירים כל אפשרות״

משוַאה הנותנת אנדרלמוסיה

נוכיח שהמשואה $y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n)$ מובילה, כמעט תמיד, לאנדרלמוסיה מושלמת, לשם כך נגדיר משתַנה חדש θ_n באמצעוּת, הנוסחה

$$y_n = \sin^2(2\pi\theta_n)$$

ומכאן

$$\sin^2(2\pi\theta_{n+1}) = = 4\sin^2(2\pi\theta_n)\cos^2(2\pi\theta_n)$$

טריגונומטריה אלמנטרית נותנת שאם

$$\theta_{n+1} = 2\theta_n$$

אזי יקבל y_{n+1} את הערך $4y_n(1 - y_n)$ כדרוש, לכל ערך שנבחר ל־y_n (בין 0 ל־1) קיבלנו כאילו נוסחת ״התרַבות״ לינארית עבור המשתנה החדש θ $\theta_n = 2^n\theta_0$ אולם, רואים אנו, כי רק החלק השבור של θ_n קובע לגבי התוצאה y_n הוספת מספר שלם או חיסור מספר שלם מ־θ_n אינה משנה כלל אם נשתמש בשיטה הבינרית ונבחר, למשל

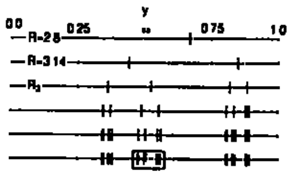
$$\theta_0 = 1/2 + 1/8 + 1/16 + 1/64 + = 0\ 101101$$

נקבל

$$\theta_1 = 0\ 01101$$
$$\theta_2 = 0\ 1101$$
$$\theta_3 = 0\ 101$$
$$\theta_4 = 0\ 01$$

וכן־הלאה בכל שלב תזוז הנקודה העשרונית ויפול המספר השלם (אם ישנו) מובן שהתהליך יימשך באופן דטרמיניסטי רק באותה מידה של דיוק שבה מוכָר הערך ההתחלתי θ_0 אם ידועים 20 מקומות אחרי הנקודה העשרונית (דיוק של מיליונית בערך) יקבל θ_{21} ערך מקרי לחלוטין וכך — כל θ_n שיבוא אחריו

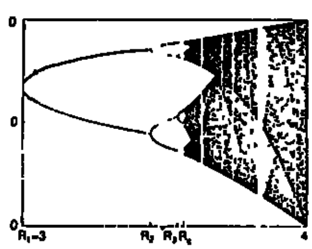
מתברר, כי משוַאות (5), או (7) המיַצגות חוק־טבע נוקשה, דטרמיניסטי, מובילות — כאשר $R = 4$ — לאנדרלמוסיה מושלמת לכאורה — יש כאן פרדוכסי הרי כאן תוכנית פשוטה, קצרה לחישובה של סדרה אינסופית שאנו טוענים כי היא חסרת־סדר לחלוטין׳ הנקודה העדינה היא בבחירה ה״תמימה״, כביכול, של הערך ההתחלתי y_0 ניתן להוכיח בנקל (ראה מסגרת נפרדת) כי אי־ודאות קלה



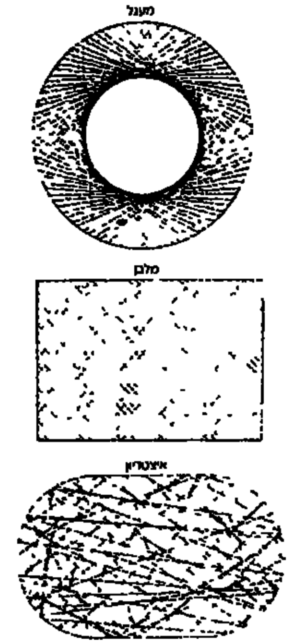
תמונה 4 (א) המעבר מיציבות לאי־יציבות בהתפתחות אוכלוסיה מסומנים ערכי נקודות המשיכה של משואות הנסיגה

$$y_{n+1} = Ry_n(1 - y_n)$$

לערכים שונים של קבוע־ההתרבות R לערך $R_1 = 2\ 8$ מתקבלת נקודת־משיכה בודדת $y^* = 0\ 64$; לערך $R_2 = 3\ 14$ מתקבלות שתי נקודות־משיכה כאשר עוברים ל־$R_3 = 3\ 45$ ישנן ארבע נקודות־משיכה, וכן־הלאה יש לשים לב לכך, שדגם־ההתרבות של נקודות־המשיכה, כאשר R הולך וגדל מ R_1 ל R_2, ל R_3 וכן הלאה, מתרחש בצורה ״הדומה לעצמה״ כל נקודה מתרבה באותו אופן שבו החלה ההתרבות של נקודת־המשיכה המקורית כבר ב R_6 רואים שקבוצה חלקית של נקודות־המשיכה (במסגרת) דומה לקבוצה כולה המשך התהליך מביא ליצירת יציר גיאומטרי מסוג חדש — פרַקטל, ולאחר־מכן (לערכי R גבוהים עוד־יותר) — לאי־סדר מושלם



(ב) תיאור גרפי נוסף של ערכי נקודות־המשיכה y^*, בנוסחת הנסיגה של (א) בנקודה $R_1 = 3$ מתחילה ה״התרַבות״ מנקודת משיכה אחת לשתיים מ R_2 — ישנן ארבע נקודות משיכה ב R_c מתחיל להתגלות אי־הסדר מכאן ואילך ישנם ״תחומי משיכה״ שבהם מפוזרות הנקודות ללא סדר ב $R = 4$ אי־סדר מושלםי נקודות־המשיכה מפוזרות ללא־סדר ושיטה בכל התחום האפשרי בין $y^* = 0$ ל $y^* = 1$ שים־לב לתופעות המוזרות של אזורים שבהם כמעט אין נקודות־משיכה אף־על־פי שלערכי r קטנים־יותר וגדולים־יותר יש ״תחומי־משיכה״ צפופים



תמונה 5 תנועה של כדור ביליארד על שולחן עגול או מלבני היא מסודרת כל שינוי קל בצורת השולחן, למשל לצורת איצטדיון, יהפוך את התנועה לבלתי מסודרת לחלוטין

שבקלות, נאמר במקום העשירי אחרי הנקודה — דהיינו, אלפית אחת (בשיטה הבינרית), דיָה להביא לכך שכעבור עשר שנים לא נדע כלל מה גורלה של האוכלוסיה ההתפתחות משנה זו והלאה היא בלתי־מסודרת לחלוטין כתרגיל לקורא אני מציע שיוכיח (לפי הנתונים שלעיל), כי טעות בספירה של חרק בודד דיה כדי "להקפיץ" את אוכלוסית החרקים כעבור 20 שנה מ־0 למיליון (או להיפך), כמובן, שרוב המשוָאות הפיסיקליות (כגון משוָאות של זרימה) עוסקות בהתפתחויות מהירות הרבה יותר, כך שהצעדים הם בחלקיקים של שניות במקרים אלה הופכת משוָאה כָשלנו להרת אנדרלמוסיה תוך שניות מעטות, אלא־אם־כן ידענו את y_0 בדיוק התחלתי אינסופי את מצבה ההתחלתי של מערכת לא נדע, כמובן, לעולם בדיוק אינסופי (אפילו נתאר לעצמנו מערכת שניתן להוסיף ולשפר את מדידת מצבה ללא־גבול, מה הרוָחנו׳ כדי לדעת באמת כיצד תתפתח המערכת נאלץ להקדיש זמן אינסופי להכרת ערכה ההתחלתי) דיו לפַרפר אחד שיפרוש את כנפיו ביפאן הרחוקה כדי לגרום, באמצעות חוק לא־לינארי מן הסוג הנדון, לסופת טורנדו בארצות־הברית לכן זכתה תופעה זו גם לכינוי "תוצא הפרפר"

ואולי כאן המקום להתעורר בבהלה ולשאול האם החוקים השולטים בתנועת כוכבי־הלכת, ובמיוחד כדור־ארצנו, הם לינאריים לחלוטין מי לידינו יתקע שאין אפקטים קטנים (הנובעים מכוחות־משיכה של כוכבים סמוכים, אבק־מטאורים וכדי) שאינם לינאריים ואם־כך — אולי יציבות המסלול שלנו סביב השמש היא תופעה חולפת הרי עברנו כ־10^9 מחזורים בלבד האם יתכן, שבעוד עשרות־אלפי־ (אלפי, מאותי) שנים אורב לכדור־הארץ התוהוי פשוטו כמשמעו מן הראוי לזכור, שהאלקטרון "מסובב" את גרעין האטום כ־10^{15} פעמים בשניה

כדור ביליארד, שהוא אלסטי לחלוטין בהתנגשו בדופן־השולחן, ינוע במסלול מסודר אם השולחן עגול במדוּיָק, או מלבני במדוּיָק אולם כל סטיה קלה שבקלות בצורת השולחן, למשל — צורת איצטדיון, תהפוך את תנועת־הכדור לבלתי־מסודרת לחלוטין (ראה תמונה 5)

פייגנבאום ותגליותיו

הראשון שטיפל ברצינות במשוָאה לא־לינארית מן הסוג הנדון, היה המטאורולוג אדוארד לורנץ (E N Lorenz) בעבודה חשובה, אשר שום פיסיקאי לא שם לב אליה, ב"ג׳ורנל אוף אטמוספריק סיינס" (1963) בחן משוָאות שהן רגישות באופן קיצוני למצב ההתחלתי כך הראה עד כמה חסרת־סיכוי היא שאיפתם של חזאים לחזות מזג־אויר ליותר מאשר יום־יומיים

אבל האיש שהעלה את הנושא לכותרות בפיסיקה (החל משנת 1976) היה פיסיקאי צעיר, מיטשל פייגנבאום (M J Feigenbaum) בשעותיו הפנויות שיחק במחשב האישי שלו ובחן את תכונותיה של המשוָאה שהזכרנו ומשוָאות לא־לינאריות אחרות שבהן קַיָם התהליך של מחזור עצמי, המשוָאות היו בעלות הצורה הכללית

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (9)$$

ובפירוט

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(f(x_0))$$
$$x_3 = f(f(f(x_0)))$$

וכן־הלאה התוצאה של חישוב ראשון הופכת לנתון המוכנס לחישוב דומה בשלב השני תוצאה זו חוזרת ומהוָה נתון לחישוב נוסף וכן הלאה הוא גילה עולם עשיר ומפתיע של תוצאות שעל אחדות מהן רמזנו בסעיפים הקודמים

פייגנבאום הוקסם כל־כך מממצאָיו עד שהתמכר לחישובים אלה וזנח את העבודה שהיתה מוטלת עליו מטעם מעבדת המחקר שבה הועסק הנהלת המעבדה שקלה את פיטוריו בשל חוסר־יעילות היום פייגנבאום הוא אחד המוזמנים המבוקשים ביותר בכנסים מדעיים ברחבי תבל

פייגנבאום גילה שקימת **חוקיות אוניורסלית**, שמקימים הערכים ה"יציבים", דהינו נקודות־המשיכה שאליהן מתנקזים ערכי הפונקציה בתהליך המחזור העצמי שתיארנו כמו כן, מקימים ערכי הפרמטרים (כגון R, בדוגמתנו), שבהם חלים המעברים מנקודת־משיכה אחת לשתיים, משתיים לארבע וכן הלאה, חוקיות

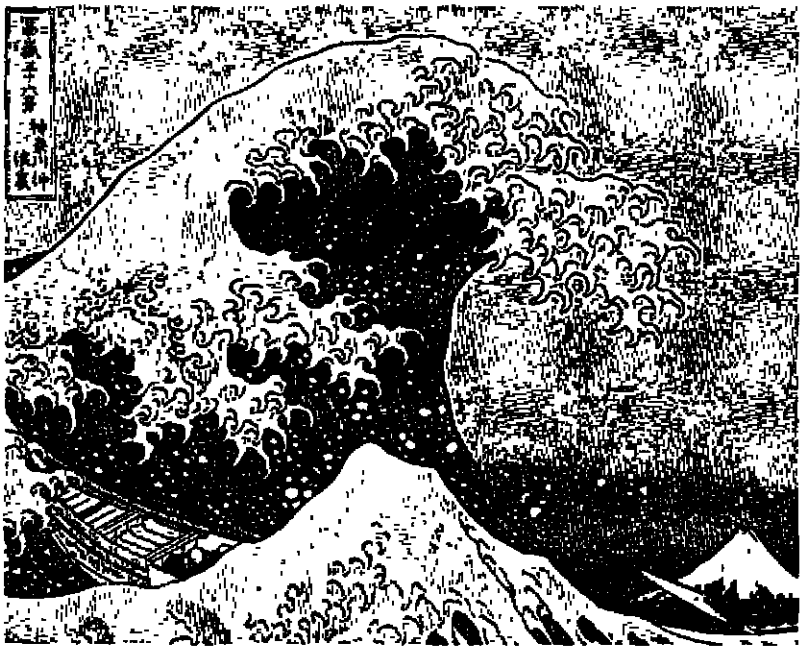
אוניורסלית משלהם מסתבר, שהחוקיות הזו היא כה פשוטה וכה אוניורסלית עד שהיא נכונה, ללא הבדלי־ניסוח, לפונקציות f בעלות צורות שונות, כולל פונקציות של מספר משתנים $f(x_n,y_n,z_n)$ אוסף נקודות־המשיכה, כך מסתבר, מצטרף ליציר גיאומטרי מסוג חדש שהוא, לכאורה, צפוף ואף־על־פי־כן איננו קו חד־ממַדי פשוט או תחום אחר בעל מימד פשוט מסתבר, שאוסף הנקודות מהוה יציר גיאומטרי שניתן להגדיר עבורו מימד חדש, שבור המימד יהיה מספר מוגדר־היטב אשר בדרך־כלל איננו מספר שלם "יצירים" כאלה, בעלי מְמַדים שבורים, נקראים **פְּרַקְטָלִים** ואילו התנהגות מוזרה זו של נקודות־המשיכה זיכתה אותן בשם **"נקודות־משיכה מוזרות"** (strange attractors)

פרקטלים

הנושא של יצירים גיאומטריים בעלי ממַדים שבורים (פרקטלים) הוא אחד הלהיטים המתמטיים של השנים האחרונות [1] הוא בודאי ראוי למאמר נפרד[2] אך, כפי שראינו, אחת הדרכים המתמטיות לייצור פרקטלים הוא באמצעות משוָאות לא־ליניאריות הפיצול החוזר ונשנה של ערכי התנקזות או "משיכה" הוא מרשָם לייצור צורות הדומות לעצמן בכל קנה־מידה תופעות כאלו מופיעות למשל בגלים (תמונה 6) ובזרימה עם מערבולות (דבר, שעוד ליאונרדו דה־וינצ'י הבחין בו — ראה תמונה 7) היא מופיעה בהתפרקות חשמלית (תמונה 8) ובחלחול־מים דרך סלע נקבובי כל התופעות הללו, ורבות רבות

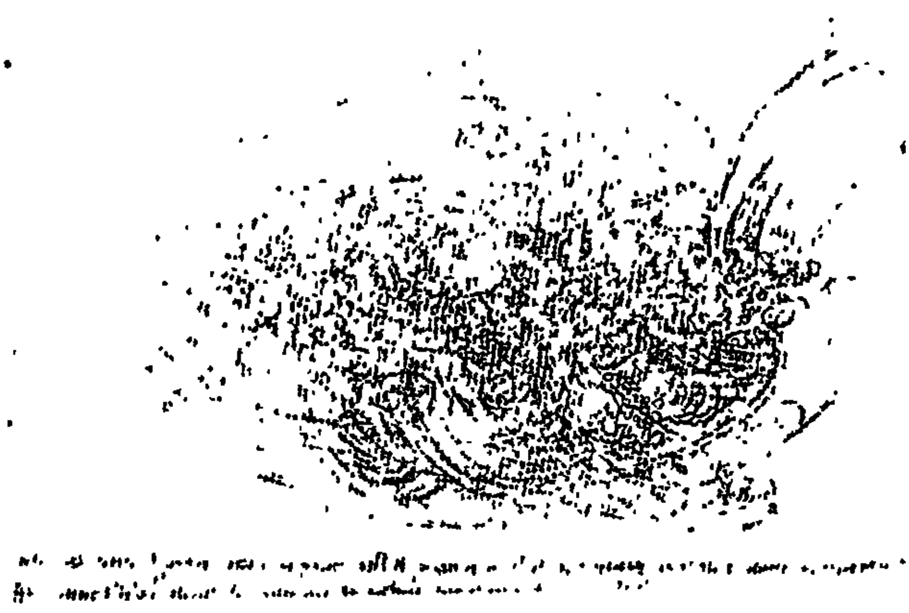
1) ראה מפלצות גיאומטריות ומושג הפרקטל מאת נחמן נבעולי, "מדע" כ"ג/2 (1979), עמ' 101–102

2) מאמר מיוחד על פרקטלים יופיע באחד הגיליונות הבאים של עלי"ה

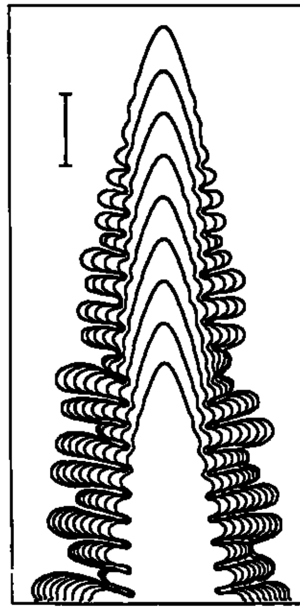


תמונה 6 גל־פרקטל, מתוך הדפס יפני

תמונה 8 התפרקות חשמלית בחומר מבודד היא דוגמה לצמיחה של צורה פרקטלית



תמונה 7 זרימה מְעַרְבָּלית, ציור של ליאונרדו דה וינצ'י



תמונה 9 גדילה של צורה גבישית דֶנדריטית (גביש דמוי־מחט) כדוגמה להתפתחות פרקטלית גם־היא תוצאה של משואה לא־לינארית (קנה־המידה 50 אלפיות המ"מ)

אחרות ניתן לאפיין בממַדים שאינם שלמים משטח מחוספס מאוד עשוי להיות בעל מימד גדול מ־2 וספוג בעל נקבוביות הולכות וקטנות — בעל מימד קטן מ־3 כל אלו הן תופעות שיש בהן סדר מסוים, אך הן בודאי פחות מסודרות מן התופעות המתיַחסות לממַדים שלמים

רק עתה — ושוב בזכותם של מחשבים רבי־עוצמה — מגלים אנו מה רבות התופעות מכל תחומי החיים שניתן לתארן באמצעות המתמטיקה של הפרקטלים גלכסיות ואבק בינכוכבי, עננים, צורות גיאוגרפיות (קו החוף המערבי של בריטניה הוא בעל מימד גדול מ־1), גבישוני־קרח, הרטבת משטחים, חלחול, הולכה חשמלית דרך מוליכים מזוהמים ודרך מבֻדדים מזוהמים, ועוד ועוד — כל אלו ניתנים לתיאור באמצעות הגיאומטריה של הפרקטלים (תמונה 9)

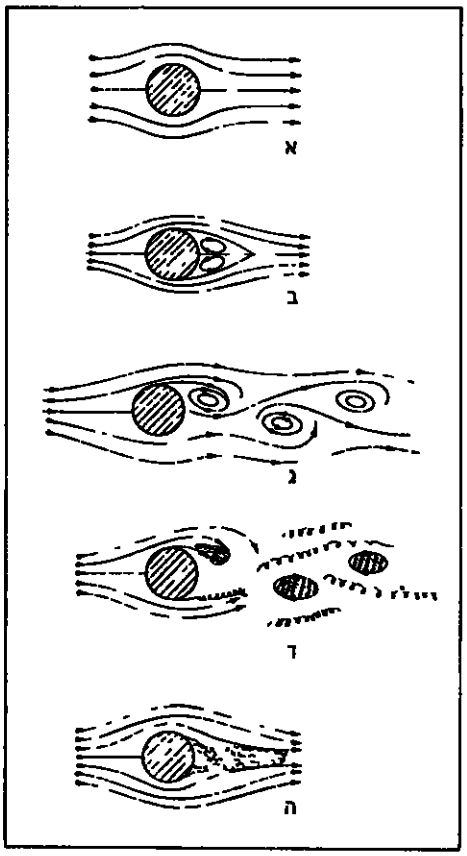
הפרקטלים הם שלב־ביניים בין התופעות המסודרות, הלינאריות, והתופעות שבהן קיָם אי־סדר מושלם ממש כפי שהפרקטלים מתקבלים מתוך מרשם מדויָק — בצורת חוק — כך גם אי־הסדר המושלם יכול להתקבל כמסקנה הגיונית הכרחית מתוך חוק יתר־על־כן, אותו חוק עצמו יוליד את כולם

חזרה אל המערבלים

משואות־הזרימה עוסקות בחוקי מהירויות־התנועה (הוקטוריות) של חלקיקי־החומר הזורם הן מכילות איבר לא־לינארי, איבר שתלוי בריבוע המהירויות במשואות הזרימה מופיע קבוע יסודי אחד, R, הידוע כמספר־רֵינולדס מספר זה גָדל ככל שעוצמת־הזרם (כמות החלקיקים העוברת בכל־שניה) גדולה־יותר וככל שהצמיגות (המשיכה ההדדית בין החלקיקים) וחתך רוחב־הצינור הפנוי לזרימה קטנים־יותר

כל עוד R קטן, מתקיימת בצינור זרימה מסודרת של חלקיקי־הנוזל, ממש כזרימת מכוניות בכביש רב־מסלולי כאשר הקבוע R גדל ומגיע לגודל קריטי מסוים, נוצר זוג של מערבלים גידול נוסף ב־R יכפיל את מספר המערבלים וכן־הלאה, עד למצב המתקרב לאנדרלמוסיה מושלמת אין ספק, כי שעת־עומס בתנועה, כביש־צר ונהגים חסרי התחשבות הדדית נותנים "מספר רינולדס" גבוה, והאנדרלמוסיה — מובטחת (תמונות 10, 11)

מבחינה מתמטית ברור לנו כיום מה קורה כל־עוד R קטן, מתפתחות מהירויות התחלתיות קרובות זו־לזו לתנועה של זרימה יציבה ומסודרת, כאשר כל המהירויות משתוות תוך זמן קצר לערך יציב אחד כאשר R גדל מתחילים הפיצולים ולבסוף — בא הגודל הקריטי R, שמעבר לו הבדל



תמונה 10 זרימה עם מְערבָלים ניתן להבין תופעה זו אם מניחים שמהירות התנועה של כל חלקיק מחלקיקי־הנוזל כפופה למשואה לא־לינארית הקבוע השולט במשואה זו ידוע כמספר־רינולדס, R מספר זה גָדל ככל שגָדלה עוצמת־הזרם וככל שקטן חתך רוחב־הצינור הפנוי לזרימה וקטנה הצמיגות (כוחות־המשיכה ההדדיים בין חלקיקי־הנוזל) כל עוד R קטן תביא המשואה לכך שהמהירויות של כל חלקיקי־הנוזל וכיווניהם יהיו זהים (נקודת־משיכה יחידה) (א) כאשר R גָדל רואים התפצלות־הזרימה לשני מסלולים עיקריים (שתי נקודות משיכה) (ב) גידול נוסף בערכו של R יביא למערבלים נוספים (ג) ולבסוף לאי־סדר (ד, ה)

זעיר שבזעירים בין מהירויותיהם של שני חלקיקי־חומר דַיו להוליד תוך זמן קצר תנועות שונות לחלוטין זו־מזו החלקיקים ינועו בכיוונים שונים ובמהירויות שונות מבלי שקימת — אפילו עקרונית — דרך לְנבא את מהלך־הזרימה נולדה האנדרלמוסיה

מאמינים אנו, כי ביסודן של כל תופעות־הטבע מונחים חוקים פשוטים מדוע, אם־כן, כה רבות הן התופעות עצמן, מדוע כה שונות ומגוונות הן וכה מסובכות בכל תחומי עולם־החומר?

תמונה 11 זרימת נוזלים עם מערבלים מתפצלים והולכים, כמוסבר בתמונה 10

בשנות השמונים הצלחנו — באמצעותם של מחשבים — לתפוס את קצה החוט המוביל לתשובה על השאלה הזאת חוקים שאינם לינאריים — אפילו פשוטים הם בניסוחם — הם פוריים־ביותר ויש בכוחם להוליד מגוון עצום של תופעות סבוכות (תמונות 12, 13), כאלו שניכר בהן סדר כלשהו ואף כאלו שבהן אי־הסדר הוא מושלם כבר יודעים אנו, פה ושם, לנבא מתי יוליד החוק תופעה פשוטה ומתי — תופעה סבוכה נפתחה דרך אל מרחבים עצומים של פיסיקה חדשה מרחבים, אשר לעומתם כל הפיסיקה של ספרי־הלימוד תֵּרָאה בקרוב כתרגילים בחשבון לבי״ס עממי

כבר היום ברור, שעובדַת קיומם של חלקיקי־יסוד שונים — ואפילו עובדַת קיומם של חלקיקים בכלל — היא תוצאה של חוקי־טבע לא־לינאריים בימים אלה ממש מתפרסמים מאמרים רבים ובהם גילויים מפתיעים ביותר בדבר ההתנהגות של מערכות קוונטיות (הכפופות לתורת־הקוונטים) לא־מסודרות

אין כל ספק, עומדים אנו בנקודת היציאה של פיסיקה חדשה ורבת־הרפתקאות, וכמעט כל הדרך — לפנינו!

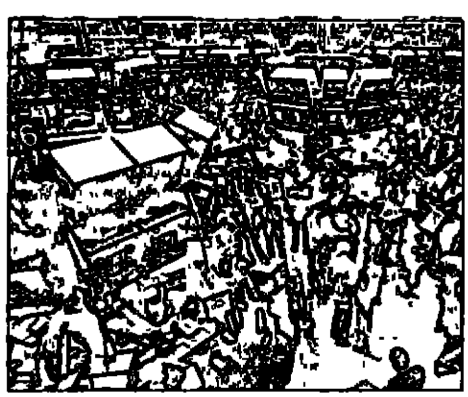
לקריאה נוספת

Gleick J , 1987, —
Chaos; Making a New Science,
Viking, New York

Hofstadter D R 1986,
Metamagical Themas,
Bantam, New York, (פרק 16)

Ford J , 1983,
How Random is a Coin Toss?
Physics Today, April, 40

Kadanoff L P , 1983,
Roads to Chaos,
Physics Today, December, 46



תמונה 13 אנדרלמוסיה בבורסה
האם היא תוצאה של משוואה לא־ לינארית פשוטה?

תמונה 12 תנועה של עשן המיתמר מסיגריה, הופכת מתנועה מסודרת לבלתי־מסודרת