ריבוע העיגול
חלק א'

מאת **בנימין ווייס**,
האוניברסיטה העברית

אחת משלוש הבעיות המפורסמות של היוונים היתה לרבע את המעגל הפרוש המקובל של הבעיה היה — לבנות בעזרת סרגל ומחוגה רבוע ששטחו יהיה שווה לשטח של מעגל נתון התברר במשך הזמן שלפי הפרוש הזה אין פתרון לבעיה, כלומר הוכח שאי אפשר לרבע את המעגל באמצעות סרגל ומחוגה

התבוננות עמוקה יותר במושג שטח מביאה אותנו לפרוש אחר של הבעיה
האם ניתן לחלק מעגל למספר סופי של קבוצות ולהזיזן בצורה כזאת שאפשר יהיה להרכיב מהן רבועי

לפני כשנתיים, מתמטיקאי הונגרי מ לצקוביץ (Miklos Laczkovich) הפתיע את העולם המתמטי בהציגו הוכחה שדבר זה אכן אפשריי במלים אחרות, הוא הצליח לרבע את המעגל במובן השני מטרתנו במאמר הזה היא להסביר את התוצאה הזאת בסעיף הראשון נסקור את הספור הקלאסי יותר הקשור לטיבו של **המספר** π בסעיף השני נרחיב את הדבור על המושג **שטח** ונראה למה הפרוש האחרון לבעיה גם הוא מאד טבעי בחלק האחרון נאמר כמה מלים על התוצאה של לצקוביץ ונביא גם תוצאה קומבינטורית שמשמשת אותו במלאכתו

1. שטח המעגל והיקפו

הקדמונים עסקו בבעיה של שטח העיגול[1] ושל אורך המעגל וגילו את העובדה הבסיסית שהיחס בין שטח העיגול ובין ריבוע קוטרו הוא קבוע (ראה מסגרת 1) מכאן הסיקו, שאם r הוא רדיוס העיגול, כי אז גם היחס בין השטח ובין r^2 הוא קבוע את הקבוע הזה מסמנים באות π בעזרתו, שיטחו של המעגל הוא πr^2 ואורכו של המעגל המתאים (ראה מסגרת 2) הוא $2\pi r$ הפרוש המקובל לבעיית רבוע המעגל היה שיש "למצוא" רבוע השווה בשטחו לעיגול נתון (המשתנה העקרי שנקבע כאשר העיגול נתון הוא רדיוס r) במלה "למצוא" השתמשו במובן של בנייה בעזרת סרגל ומחוגה בגלל הנוסחאות שרשמנו בעיה זו שקולה לגמרי למשימה בהנתן קו באורך 1 (קנה המדה) בנה קו שאורכו $\sqrt{\pi}$ השאלה היא בעצם, האם ניתן לבנות קו שאורכו π, כי בהנתן אורך a קל לבנות בעזרת סרגל ומחוגה קו שאורכו $\sqrt{a}$ או a^2 (ראה מסגרת 3)

גדול המתמטיקאים של ימי קדם, ארכימדס (Archimedes, 212–287 לפה"ס), לא הצליח לבנות את π, אך הוא נתן קרובים טובים מאד שלא שופרו במשך מאות שנים יתר על כן, הוא הראה דרך שבה ניתן לקבל קרובים טובים כרצוננו — אם רק נצליח לבצע את החשבונות הדרושים שיטתו היתה לבנות סדרת מצולעים חסומים במעגל אשר ממצים יותר ויותר משטחו, וסדרת מצולעים החוסמים את המעגל כך שהחתוך של כולם שווה למעגל בדיוק (ראה מסגרת 4)
בתקופה הערבית, אל־בירוני (Al-Biruni, 973–1048) כותב בקצור שהיחס בין קוטר המעגל להיקפו איננו רציונלי, ודבר דומה אנו מוצאים במקורות שלנו בפרוש של הרמב"ם למשנה במסכת ערובין (פא' מה')

> צריך אתה לדעת שיחס קוטר העיגול להקפו בלתי ידוע, ואי אפשר לדבר עליו לעולם בדיוק, ואין זה חסרון ידיעה מצדנו כמו שחושבים הסכלים, אלא שדבר זה מצד טבעו בלתי נודע ואין במציאותו שיודע אבל אפשר לשערו בקירוב, וככר עשו מומחי המהנדסים בזה חבורים

לא ידוע לנו על מה בססו המתמטיקאים באותה תקופה את הקביעה הזאת אך סביר להניח שזו היתה קביעה אמפירית שנבעה

1) במקורות שלנו המילה מעגל מתייחסת הן לעיגול המלא והן לשפתו
למען הבהירות נשתדל מעתה להקפיד על השמוש הבא **העיגול** הוא העגול המלא ולו **שטח** שפת העגול תקרא **מעגל** ולו **אורך** באנגלית לרוב circle מתאר גם הצורה המלאה וגם את השפה מתמטיקאים הרוצים להבהיר את דבריהם מכנים את הצורה המלאה disk שימו לב שאי בהירות דומה קיימת גם לגבי צורות אחרות, כגון משולש או רבוע

מסגרת 1

כך הראה אודוקסוס[2] (Eudoxus, 408(!)–355(!) לפס"נ) כי היחס בין שטח המעגל ובין ריבוע הקוטר הוא קבוע (לפי Boyer, 1985, עמ' 101)

נתונים העיגולים C ו c (ראה שרטוט) נסמן ב d ו D את הקטרים שלהם וב a ו A את השטחים שלהם, בהתאמה עלינו להוכיח כי

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

נניח, בדרך השלילה, כי

$$\frac{a}{A} \neq \frac{d^2}{D^2}$$

אם

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$$

אזי קיים מספר $a' < a$ כך ש

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

נסמן $a - a' = \varepsilon > 0$

נסתכל במצולעים המשוכללים בעלי n צלעות, החסומים ב c וב C, בהתאמה יהיו שיטחיהם p_n ו P_n, בהתאמה

נתבונן בשטח הביניים, בתוך העיגולים אך מחוץ למצולעים אם נכפיל את מספר הצלעות של המצולעים, כי אז יקטן שטח הביניים יותר מאשר פי שניים אנו יכולים להכפיל את מספר הצלעות במצולעים שוב ושוב, עד אשר נקבל $a - p_n < \varepsilon$ הואיל ו $\varepsilon = a - a'$, נקבל כי $p_n > a'$

על־ידי חישוב שטחים של המצולעים ניתן להראות ש

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$$

ולפי הנחתנו

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

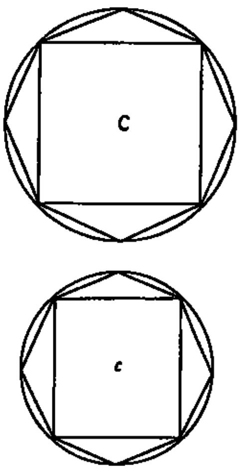
יוצא, איפוא, כי

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$$

הואיל ו $p_n > a'$, השוויון האחרון יתקיים רק בתנאי ש $P_n > A$ אך זאת סתירה עם ההנחה ש P_n הוא שטח מצולע חסום ב C

בצורה דומה מראים, כי לא יתכן ש

$$\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$$



2) הוכחה זאת מיוחסת אמנם לאודוקסוס, אך היא מופיעה לראשונה ב"אלמנטים" של אוקלידס, במאה השלישית לפה"ס

מהנסיונות למצוא קרובים ל π, ולא קביעה עיונית שבאה מהבנה עמוקה של טיבו של המספר π

הראשון שהוכיח את האי־רציונלית של π היה למברט (J H Lambert 1728–1777) בסוף המאה השמונה עשרה (1770) הוא בסס את הוכחתו על משפט האומר, שאם $x \neq 0$ הוא מספר רציונלי, כי אז tgx איננו רציונלי מכיון ש $\tan \pi/4 = 1$ ברור ש π איננו יכול להיות מספר רציונלי

כעבור מאה שנה, לאחר שהרמיט (C Hermite, 1822–1901) הראה כי המספר e (הבסיס ללוגריתמים הטבעיים) איננו אלגברי, כלומר איננו שורש של פולינום עם מקדמים שלמים, הצליח לינדמן (C L F von Lindemann, 1852–1939) להוכיח שגם π **איננו אלגברי** הואיל והיה ידוע, כי כל בנייה בעזרת סרגל ומחוגה תבנה רק מספרים אלגבריים, השאלה הקלאסית של היוונים קבלה בכך תשובה **שלילית** אי אפשר לרבע את המעגל בעזרת סרגל ומחוגה בלבד היה זה בשנת 1882

2. מהו שטח

ברור לכולנו שהשטח של מלבן שצלעותיו b, a (מספרים שלמים) שווה למכפלה a b לטענה הזאת אפשר לתת הוכחה על־ידי חלוקת מלבן כזה ל ab רבועי יחידה אולם, אם ברצוננו להגדיר שטח של צורה כללית במישור אזי אין עוד לצפות לתמונה כה פשוטה ושקופה ואכן הילברט (D Hilbert, 1862–1943), בספרו על יסודות הגאומטריה, מקדיש פרק ארוך לדיון במושג השטח ובאכסיומות של הגאומטריה שבהן הוא תלוי הילברט מתחיל בשתי התכונות הבאות של שטח

(1) לצורות חופפות שטח שווה

(2) אם A מורכבת משתי צורות A_1, A_2 אשר חופפות בהתאמה את B_2, B_1 המרכיבות B, אזי גם ל־A ול B שטח שווה

את (2) אפשר להכליל, כמובן, למספר סופי של מרכיבים וכך מגיע הילברט להגדרה דלהלן

הגדרה 1 שני מצולעים A, B הם **שווי שטח** אם ניתן לחלקם למשולשים $A_k, \ldots, A_1$, $B_k, \ldots, B_1$ החופפים בהתאמה

לא קשה להווכח שיחס זה הוא יחס שקילות (ברור, כי הוא סימטרי ורפלקסיבי, וצריך להוכיח שהוא גם טרנסיטיבי) אפשר להכליל את ההגדרה הזאת באופן הבא

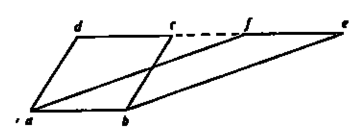
הגדרה 2 נאמר ששני מצולעים B ו A הם **שווי תוכן** אם קיימים מצולעים C, D שהם **שווי שטח** כך ש

(i) $A \cap C = \Phi$, $A \cup C$ מצולע

(ii) $B \cap D = \Phi$, $B \cup D$ מצולע

(iii) $A \cup C$, $B \cup D$ שווי שטח

לפני שנדון בקשר שבין שני המושגים שהגדרנו, נסביר את ההגדרה השנייה באמצעות דוגמה



דוגמה נראה, שהמקביליות abcd ו abef שבשרטוט הן שוות תוכן

ואמנם, נסמן

$A = abcd$, $B = abef$

כמו־כן, נסתכל בשני המשולשים

$C = bec$, $D = afd$

נראה, כי ארבע הצורות האלה מקיימות את שלוש הדרישות של הגדרה 2 ואמנם

(i) C ו D הם משולשים חופפים משום ש $af \parallel be$

(ii) מתקיים $A \cap C = \Phi$ ו $A \cup C$ הוא המרובע dabe כמו־כן $B \cap D = \Phi$ ו $B \cup D$ גם הוא המרובע dabe

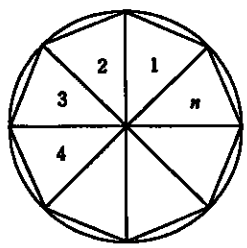
(iii) $A \cup C$ ו $B \cup D$ הם אותה צורה עצמה (המרובע dabe), לכן הם, כמובן, שווי שטח

רואים, על־כן, כי המקביליות A ו B אכן שוות תוכן, לפי הגדרה 2

מסגרת 2

מדוע מופיע הקבוע π הן בנוסחת השטח של מעגל והן בנוסחת היקפו?

כפי שראינו במסגרת 1, אפשר לקרב את שטחו של מעגל בעזרת שטחי המצולעים המשוכללים החסומים בו נחלק מצולע כזה למשולשים, כמתואר בשרטוט



נסמן n — מספר המשולשים
h — גובה של המשולש
a — אורך צלע המצולע
r — רדיוס המעגל

נקבל, כי

שטח המצולע = (שטח של משולש) $\cdot\ n$

$= n \ \frac{ah}{2} =$

$= \frac{1}{2} \ h \ (n \cdot a) =$

$= \frac{1}{2} \ h$ (היקף המצולע)

כאשר n גדל ללא הגבלה, מתקרב הגובה של המשולש לרדיוס המעגל ואילו ההיקף והשטח של המצולע שואפים להיקפו ולשטחו של העיגול, בהתאמה

מכאן מקבלים, כי

שטח המעגל = (היקף המעגל) $\frac{1}{2} \ r$

או

היקף המעגל = (שטח המעגל) $\frac{2}{r}$

במסגרת הקודמת ראינו, כי שטח המעגל הוא πr^2, לכן

היקף המעגל $= \frac{2}{r} \cdot \pi r^2 = 2\pi r$

הערה: דרך אחרת להראות עובדה זו ניתן למצוא במקורותינו בפירושים של בעלי תוספות לגמרא במס' עירובין (דף נו ע"ב) ובמס' סוכה (דף ח ע"א)

נשאלת כעת השאלה, מה ההבדל בין שני המושגים שהוגדרו באמצעות ההגדרות 1 ו 2 אפשר היה לחשוב, כי המושג השני — מצולעים שווי תוכן — מתלכד עם המושג הראשון — מצולעים שווי שטח אולם הילברט הראה, שאין הדבר כך תמיד, והוא תלוי במערכת האקסיומטית שבוחרים כדי לבנות עליה את הגאומטריה למשל, בדוגמה האחרונה, שבה הוכחנו כבר שהמקביליות A ו B הן **שוות־תוכן**, אנו רוצים כעת להראות, ששני המצולעים הם גם **שווי־שטח** במובן של הגדרה 1 לשם כך יש להראות, שניתן לפרק את שתי המקביליות לקבוצות של משולשים חופפים, בהתאמה מתברר, כי כדי להוכיח את קיומו של פירוק כזה, אנו זקוקים **לאקסיומת של ארכימדס**, האומרת **שבהנתן שני קטעים, I ו J, קיים שלם n כך ש I · n מכיל את J** בלי אקסיומה זאת לא ניתן להוכיח ש A ו B שוות שטח ואכן, בגיאומטריה שבה אקסיומות ארכימדס אינה מתקיימת אפשר לתת דוגמאות למקביליות כמו A ו B שאינן שוות שטח (אך הן עדיין שוות־תוכן, כמובן) הילברט הראה, שהרעיון של שוויון־תוכן תואם את ההבנה האינטואיטיבית שלנו של מושג השטח לפי הבנתנו, שטח של משולש הוא גודל השווה למכפלת מחצית צלע בגובה הנופל על צלע זו, ושטח של מלבן אינו, אלא מכפלת צלעותיו הילברט הראה, שאם לשני מצולעים אותו שטח במובן המקובל הזה, אזי מצולעים אלה הם בהכרח שווי־תוכן בהוכחת טענה זאת לא נעשה שימוש באקסיומת ארכימדס

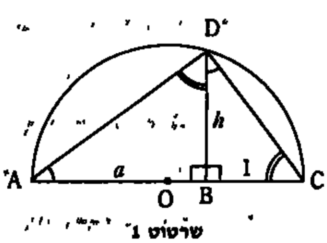
לעומת זאת, אקסיומת ארכימדס נחוצה כדי להוכיח טענה דומה על המושג שניתן בהגדרה 1 במלים אחרות, אנו זקוקים לאקסיומת ארכימדס כשרוצים להראות ששני מצולעים בעלי שטח שווה במובן הרגיל הם גם שווי שטח על־פי הגדרה 1 (הכוון ההפוך נכון, לעומת זאת, תמיד, והדבר משתמע מהגדרה 1 באופן מידי) הבעיה המרכזית באחת הגירסאות של הוכחה זו היא להראות שכל מלבן שווה שטח (במובן של הגדרה 1) לריבוע קיומו של ריבוע שצלעו s כך ש s^2 שווה למכפלת אורכי הצלעות של מלבן

מסגרת 3

מספר בניות בעזרת סרגל ומחוגה.

בנייה א: בניית קטע השווה באורכו **לשורש** של קטע נתון

נניח, כי אורכו של הקטע הנתון, AB, הוא a נאריך את הקטע AB בקטע BC, שאורכו יחידה אחת על הקטע AC נבנה כעת, כעל קוטר, חצי מעגל, כמתואר בשרטוט 1 בנקודה B נעמיד אנך ל AC את נקודת החתוך של האנך עם המעגל נסמן ב D אנו טוענים, כי BD הוא הקטע המבוקש



שרטוט 1

טענה: $h = \sqrt{a}$

כאשר h הוא האורך של הקטע BD

הוכחה: הואיל והמשולש ADC הוא ישר־זווית,

קל להראות את הדמיון

$\Delta ADB \sim \Delta DBC$

מכאן נקבל את הפרופורציה

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{1}$$

כלומר $h^2 = a$

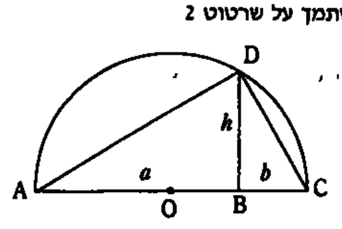
מש"ל

בנייה ב: בניית קטע השווה באורכו **לריבוע** של קטע נתון

הקורא מוזמן לבצע בנייה זאת בעצמו (רמז הפוך את הבנייה הקודמת)

בנייה ג: בניית ריבוע השווה בשטחו לשטח של מלבן נתון

הקורא מוזמן לבצע ולהסביר את הבנייה בהסתמך על שרטוט 2



שרטוט 2

נתון מובטח על־ידי בנייה ג במסגרת 3 אנו זקוקים לאקסיומת ארכימדס כדי להוכיח כי ריבוע זה שווה־שטח למלבן גם במובן של הגדרה 1 נראה זאת

משפט: אם ABCD **הוא מלבן שצלעותיו** a **ו** b **ו** FAGD **הוא ריבוע בעל צלע באורך** s **כך ש** $s^2 = a \quad b$, **אזי המלבן והריבוע הם שווי־שטח גם במובן של הגדרה 1.**

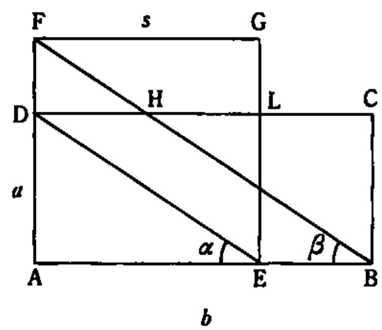
הוכחה

מקרה I $a < b \le 2a$

במקרה זה עובר הישר FB מתחת לנקודה L, ולכן

– את המלבן ABCD אפשר להרכיב מהמחומש DAEKH ומהמשולשים CHB ו KEB

– את הריבוע FAEG אפשר להרכיב מאותו מחומש DAEKH, ומהמשולשים GFK ו FDH



על־כן, כדי להוכיח שהריבוע והמלבן הם שווי־שטח במובן של הגדרה 1, די להראות את חפיפות המשולשים

$$\Delta\, CHB \cong \Delta\, GFK$$

ו $$\Delta\, KEB \cong \Delta\, FDH$$

ואמנם, החפיפות נובעות מהעובדה שהקטעים המלוכסנים, FB ו DE, מקבילים זה לזה נוכיח זאת

נסמן $\measuredangle AED = \alpha$, $\measuredangle ABF = \beta$

ונוכיח כי

$$\tan \alpha = \tan \beta$$

ואמנם,

$$\tan \alpha = \frac{a}{s}$$

$$\tan \beta = \frac{s}{b}$$

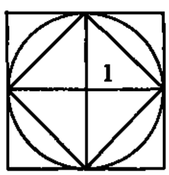
מסגרת 4

כך אימד ארכימדס את ערכו של π (לפי Webb, 1987, עמ' 13)

אם מציירים מעגל יחידה ($r = 1$), חוסמים אותו בריבוע וחוסמים בו ריבוע (ראה שרטוט), ברור, כי

שטח הריבוע החוסם > שטח העיגול > שטח הריבוע החסום

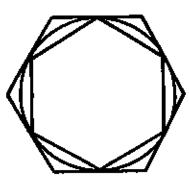
שטחו של עיגול היחידה הוא π, ושטחי שני הריבועים הם 2 ו 4, בהתאמה



לכן ברור, כי

$$2 < \pi < 4$$

כעת, נחליף את הריבועים במשושים משוכללים



באמצעות חישוב פשוט מקבלים, כי שטחו של המשושה החסום הוא $3\sqrt{3/2} \sim 2\ 598$ ושל המשושה החוסם הוא $6/\sqrt{3} \sim 3\ 464$ על־כן

$$2\ 598 < \pi < 3\ 464$$

בהמשך, החליף ארכימדס את המשושים במצולעים משוכללים בני 12, 24, 48 ובסוף 96 צלעות

תוצאתו האחרונה היתה

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

או, בצורה עשרונית,

$$3\ 1408 < \pi < 3\ 1428$$

את שטחי המצולעים חישב ארכימדס בעזרת נוסחאות השקולות לזהויות הטריגונומטריות הפשוטות

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

השוויון

$$\frac{a}{s} = \frac{s}{b}$$

נובע כעת מהנחת המשפט, שלפיה
$s^2 = ab$

מקרה II $b > 2a$

אם $b \le 4a$, כי אז נחלק את המלבן לחצאים – לשני מלבנים שמימדיהם הם $a \times b/2$ לפי מה שהוכח כבר, לכל אחד משני החצאים קיים הריבוע המבוקש אם נאחד את שני הריבועים יווצר מלבן חדש, ועל המלבן הזה חל, כמובן, התנאי הקודם (דהיינו, רוחבו אינו קטן ממחצית אורכו) על־כן, נכונות הטענה עבור המלבן החדש נובעת ממה שהוכח קודם

מכאן ברור כבר, כיצד ניתן להוכיח את הטענה במקרה הכללי נשתמש בשיטת האינדוקציה המתמטית ונראה שאם המשפט נכון עבור $b < 2^n a$, אזי הוא נכון גם עבור $b < 2^{n+1} a$ זאת על־ידי חציית המלבן הגדול לשני מלבנים שחלה עליהם הנחת האינדוקציה

אולם, כדי להפעיל את השיטה חייבים להסתמך על אקסיומת ארכימדס, שכן לכל שני מספרים a ו b עלינו להתאים מספר n כך ש $b \le 2^n a$

מעתה, יעמוד המושג הניתן בהגדרה 1 במרכז דיוננו כדי להבדיל בינו ובין מושג השטח "הרגיל", נשנה את המינוח ונכליל את הגדרה 1

הגדרה: A ו B שקולים על־ידי חלוקה סופית אם קיימות חלוקות

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \quad \cup A_k$$
$$B = B_1 \cup B_2 \cup \quad \cup B_k$$

כך ש A_i ו B_i חופפים זה את זה, לכל $0 \le i \le k$

בדיון שלנו כאן, בעיקבות הילברט, עסקנו רק במצולעים בחלקו השני של המאמר נרחיב את המושגים כך שיתאים גם לצורות אחרות

ההמשך בגיליון הבא

אנו מברכים את
פרופסור שמשון עמיצור

לרגל קבלת התואר
דוקטור לפילוסופיה לאות כבוד
מאוניברסיטת בן־גוריון בנגב