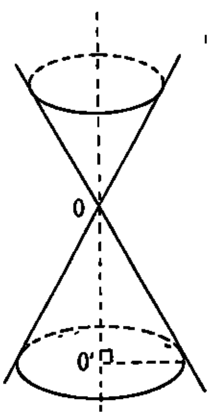
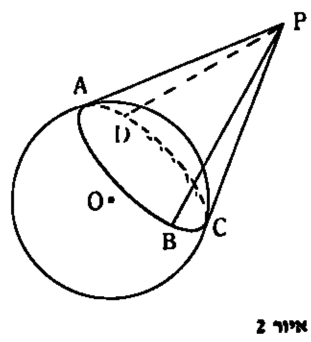
תכנים חדשים, שיטות חדשות

חתכי החרוט בגישה סינתטית

מאת **עמוס אלטשולר**,
אוניברסיטת בן־גוריון בנגב



איור 1



איור 2

בבית הספר התיכון לומדים תלמידינו להכיר את חתכי החרוט — האליפסה, הפרבולה וההיפרבולה — כמעקמים מסוימים מן המעלה השניה אמנם ניתנת הגדרתם כמקומות גאומטריים, אולם אין תלמידינו זוכים להכירם כחתכי חרוט במאמרו "חתכי החרוט" (עלייה 7) משלים ד"ר קורן את החסר, בנתנו הוכחה חישובית — בעזרת מכפלה סקלרית — לכך שחתך חרוט לא מנוון הוא אליפסה, פרבולה או היפרבולה

להוכחות חישוביות יש יופי משלהן, אך אין הן בלתי אמצעיות ומשכנעות כהוכחה סינתטית קצרה, הנוגעת מידית וישירות בלב הענין ההוכחה שלהלן היא קלסית אין בה כל חדוש, אך דומה שנשכחה בדור האחרון נראה לי שאסור שתלמיד במגמת מתמטיקה יסיים את למודיו בבית הספר התיכון מבלי לראות הוכחה זו באוניברסיטאות שונות קיימים מודלים מפלסטיק העוזרים להמחיש הוכחה זו ומומלץ לראותם (תודתי נתונה מראש למי שיוכל להדריכני היכן ניתן לרכוש מודל כזה)

1. הגדרות וטענות עזר.

אליפסה היא המקום הגאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן משתי נקודות קבועות — המוקדים — הוא גודל קבוע

היפרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות שהפרש מרחקיהן משתי נקודות קבועות — המוקדים — הוא גודל קבוע

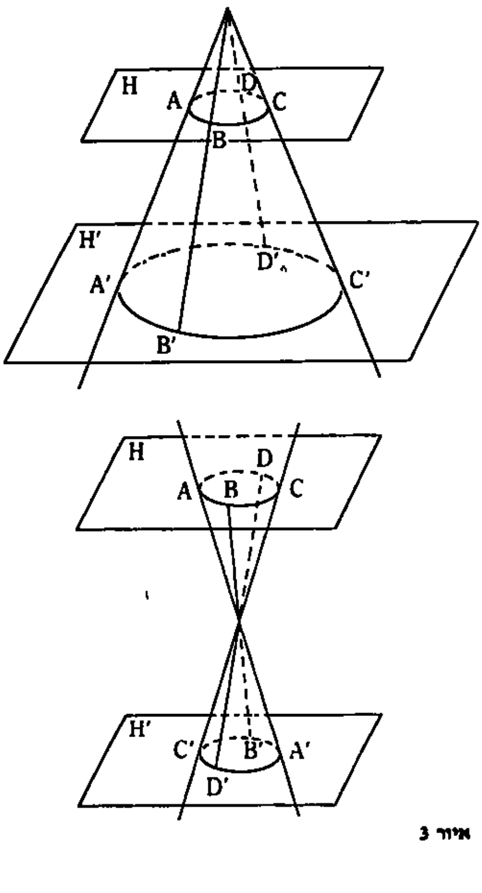
פרבולה היא המקום הגאומטרי של הנקודות שמרחקן בנקודה קבועה — המוקד — שוה למרחקן מישר קבוע — המדריך

חרוט (מעגלי) — הוא המשטח הנוצר כאשר ישר a (הקו היוצר) נע דרך נקודות מעגל קבוע (שמרכזו 0') ונקודה קבועה 0 (קודקוד החרוט) הנמצאת מעל מרכז המעגל (איור 1) הישר 00' הוא ציר החרוט לחרוט שני ענפים, והקדקוד מפריד ביניהם

טענת עזר 1: כל המשיקים היוצאים לכדור מנקודה מחוצה לו — שווים זה לזה (איור 2)

טענת עזר 2: אם שני מישורים H, H' מקבילים זה לזה וניצבים לציר החרוט, אזי כל קטעי הקווים היוצרים הנמצאים בין H ו H' שווים זה לזה (איור 3)

שתי הטענות מתקבלות על הדעת באופן אינטואיטיבי, וגם הוכחה פורמלית, בעזרת שקולי סימטריה, היא מידית



איור 3

2. האליפסה

מישור H (שלא דרך הקדקוד) החותך את החרוט בענף אחד בלבד, ואינו מקביל לקו יוצר, מחלק ענף זה לשני חלקים (איור 4א) שאחד מהם (a) חסום. אנו רוצים להוכיח כי קו החתך α הוא אליפסה

בחלק החסום (a) נכניס כדור בעל רדיוס מירבי (ציור 4ב) לשון אחרת נכניס שמה כדור קטן, וננפח אותו ככל האפשר, דהיינו, עד אשר יגע במישור H (בנקודה F) ובחרוט (במעגל ABC)

גם בחלק הבלתי חסום (b) נכניס כדור מכסימלי אשר יגע הן במישור H (בנקודה F') והן בחרוט (במעגל $A'B'C'$). דרך אחרת, ציורית יותר, לקבל כדור זה היא כדלקמן נהפוך את החרוט, כך שייראה כגביע גלידה נכניס לגביע זה כדור קטן הכדור "יישב" על המישור H וכמובן יישען על החרוט עתה ננפח את הכדור ברגע מסוים ייגע הכדור הן במישור H (בנקודה F') והן בחרוט (במעגל $A'B'C'$ אם נמשיך לנפח עוד, יתרומם הכדור מעל המישור H

ברור כי מישורי המעגלים $ABC, A'B'C'$ מקבילים זה לזה וניצבים לציר החרוט

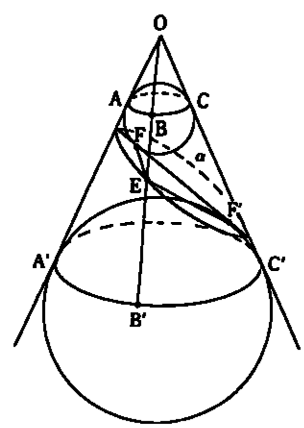
טענה: קו החתך α הוא אליפסה, אשר מוקדיה הם הנקודות F, F'

ואכן, תהי E נקודה כלשהי על α נעביר קו יוצר $OBEB'$ דרך E (איור 5)

לפי טענת העזר 1 $\quad EF = EB \quad$ (*)

וכן $\quad EF' = EB' \quad$ (**)

לכן $\quad EF + EF' = EB + EB' = BB'$



איור 5

ולפי טענת העזר 2 הגודל BB' אינו תלוי במיקומה של הנקודה E על α

3. ההיפרבולה

ההיפרבולה מתקבלת בדיוק באותו אופן כמו האליפסה, כאשר המישור H חותך את **שני** ענפי החרוט (איור 6). את שני הכדורים מכניסים כך שיגעו הן במישור H (בנקודות F, F') והן בחרוט (במעגלים $ABC, A'B'C'$)

טענה: קו החתך β, על שני מרכיביו, הוא היפרבולה אשר מוקדיה הם הנקודות F, F'

ההוכחה זהה לחלוטין להוכחה במקרה של אליפסה, אלא שבמקום לחבר את (**) ל(*), כאן נחסר, ונקבל

$$EF - EF' = EB - EB' = BB'$$

4. הפרבולה

כאשר המישור H מקביל לקו יוצר OCG (איור 7) של החרוט, קו החתך γ של המישור עם החרוט הוא פרבולה. כאן "יש מקום" רק לכדור אחד הכדור נוגע במישור H בנקודה F, ובחרוט — במעגל ABC.

יהי ℓ ישר החתוך של מישור המעגל ABC עם המישור H

טענה: קו החתך γ הוא פרבולה אשר קודקודה F ומדריכה ℓ

ואכן תהי E נקודה כלשהי על γ נראה כי מרחקה מ ℓ שוה ל EF נעביר דרך E מישור מקביל למישור המעגל ABC — הוא חותך את החרוט במעגל DGE שמרכזו Q ו ED קוטר במעגל זה

המישורים OFQ, OQE הם מישורי סימטריה של החרוט, וניצבים זה לזה דרך D ו E נעביר אנכים DJ ו EI ל ℓ

המצב עתה הוא כדלקמן

$EDJI$ הוא מלבן, QK קו אמצעים שלו, ו $QKCG$ הוא מקבילית (נזכיר כי המישור H מקביל לקו היוצר OCG)

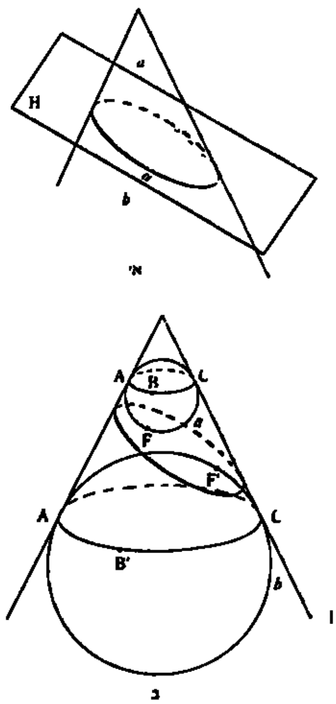
לכן $\quad EI = QK = GC$

אך, לפי טענת העזר 2 $\quad GC = BE$

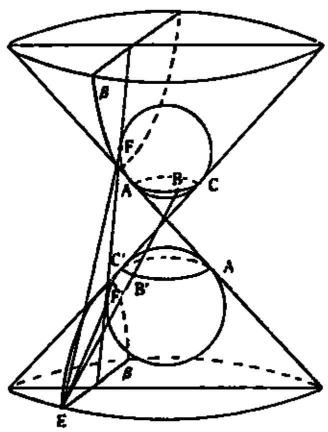
ולפי טענת העזר 1 $\quad BE = EF$

לכן $\quad EI = EF$

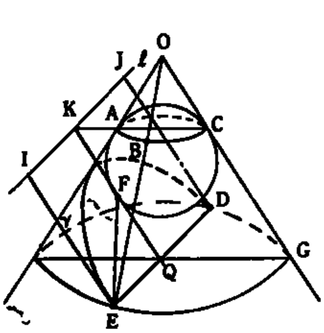
והרי EI הוא מרחק הנקודה E מהישר ℓ



איור 4



איור 6



איור 7