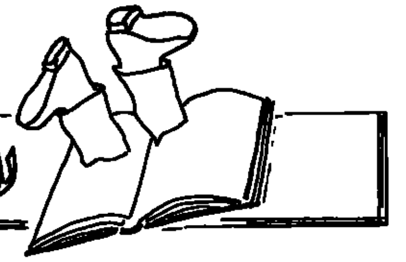


הבנה רלציונית (relational) והבנה אינסטרומנטלית (instrumental)

חלק ב׳

מאת **ריצ׳רד סקמפ (Richard Skemp)**
אוניברסיטת ווריק (Warwick), אנגליה
תרגמה **חנה פרל**

בחלק הראשון של המאמר הוגדרו המושגים הבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית הבנה רלציונית היא ידיעה של מה לעשות ומדוע, ואילו הבנה אינסטרומנטלית היא ידיעת כללית, ללא סיבות ויכולת יישומן הוצגו דוגמאות להוראה רלציונית ולהוראה אינסטרומנטלית, והומחשו ההבדלים שביניהם בחלק זה של המאמר מובא דיון מפורט ביתרונותיה ובחסרונותיה של כל שיטה, ומוסבר הצורך בתאוריה כללית מעין זו המוצגת במאמר

בחלקו הראשון של פרק זה מנסה המחבר להסביר לקורא (ולעצמו) מדוע שיטת ההוראה האינסטרומנטלית קוסמת למורים ולתלמידים רבים

קטגור ״להכעיס״ (Devil's Advocate)

האם מהעובדה שמספר כה רב של מורים מלמדים מתמטיקה אינסטרומנטלית אפשר להסיק כי יש לשיטה זו יתרונות מסויימים? ביכולתי לציין שלושה יתרונות (שאינם יתרונות הנובעים מנוחיות ההוראה בשיטה זו — אלה יוסברו מאוחר יותר)

1 **כאשר נמצאים בתוך המסגרת התכנית של מתמטיקה אינסטרומנטלית, בדרך כלל קל יותר להבין מתמטיקה זו.** ישנם נושאים, כמו כפל של שני מספרים שליליים, או חילוק בשבר, הקשים להבנה באופן רלציוני **שני הכללים:** ״מינוס כפול מינוס שווה פלוס״, ו״כדי לחלק בשבר יש להפוך אותו ולכפול״, הם כללים קלים מאד לזיכרון אם המטרה שלפנינו היא להגיע אל דף תרגילים שבו כל התשובות נכונות, הרי באמצעות המתמטיקה האינסטרומנטלית אפשר להשיג זאת בקלות ובמהירות

2 התוצאות הן מיידיות וגלויות לעין נעים לקבל דף של פתרונות נכונים, ואל לנו לזלזל בחשיבות תחושת ההצלחה שהתלמידים שואבים מכך לפני זמן קצר ביקרתי בבית ספר שבו כמה תלמידים תארו את עצמם ״סתומים״, גם המורים כינו אותם כך ילדים אלה זקוקים להצלחה כדי להחזיר לעצמם את הבטחון העצמי, ואפשר לטעון, כי באמצעות המתמטיקה האינסטרומנטלית הם ישיגו הצלחה זו ביתר קלות ומהירות מאשר בעזרת המתמטיקה הרלציונית

3 על ידי חשיבה אינסטרומנטלית מקבלים לעיתים קרובות את התשובה הנכונה מהר יותר ובבטחון רב יותר מאשר על ידי חשיבה רלציונית הבדל זה הוא כה בולט, עד כי גם מתמטיקאים רלציונים נעזרים במקרים רבים בחשיבה אינסטרומנטלית זוהי נקודה בעלת עניין תאורטי רב, ואני מקווה לדון בה ביתר הרחבה בעתיד ייתכן שכל האמור לעיל איננו מצדיק באופן מלא את המתמטיקה האינסטרומנטלית אשמח לדעת על יתרונות נוספים שיש לה

למתמטיקה הרלציונית יש ארבעה (לפחות) יתרונות

1 **היא מתאימה יותר למטלות חדשות.** לאחרונה ניסיתי לעזור לילד שלמד לכפול שני שברים עשרוניים זה בזה על ידי ביטול הנקודה העשרונית, כפל המספרים השלמים ולבסוף הכנסת הנקודה העשרונית במספרים הנתונים זו שיטה יעילה, אם הנך מבין מדוע היא פועלת מסיבה שאיננה תלויה בו, לא הבין הילד מדוע דרך זו אכן פועלת, ולכן, על פי ההגיון שלו, הפעיל אותה גם בחילוק שברים עשרוניים בשיטה זו הוא קיבל, כי $4\ 8/0.6 = 0\ 08$ אותו תלמיד למד גם, כי אם יודעים את מידתן של שתי זוויות במשולש, אזי כדי לקבל את מידת הזווית השלישית מחסרים מ 180 את סכום מידותיהן של שתי הזוויות הנתונות הוא הצליח לפתור בשיטה זו עשרה תרגילים (המורה שלו האמין בתרגול רב), והמשיך לפתור בשיטה זו גם תרגילים העוסקים בזוויות חיצוניות למשולש בפתרון חמשת התרגילים הבאים הוא כמובן שגה אינני חושב שבשני המקרים תלמיד זה נהג בטפשות הוא פשוט יישם את אשר למד למקרים חדשים הבנה רלציונית של השיטה — לא רק עצם יישום השיטה אלא גם הבנה מדוע השיטה פועלת — היתה מאפשרת לתלמיד לייחס את שיטת הפתרון לבעיה, אולי אף להתאים את השיטה לבעיות חדשות הבנה אינסטרומנטלית מחייבת את התלמיד לזכור אילו בעיות ניתנות לפתרון בשיטה מסויימת, וכן ללמוד

שיטת פתרון שונה לכל משפחה חדשה של בעיות היתרון הראשון של מתמטיקה רלציונית מוביל, אם כן, ליתרון השני

2 **קל יותר לזכור מתמטיקה רלציונית.** לכאורה יש כאן פרדוכס, שכן בוודאי קשה יותר ללמוד מתמטיקה בשיטה זו ברור כי לתלמידים קל יותר ללמוד ששטח המשולש שווה למכפלת מחצית הבסיס בגובה, מאשר להבין מדוע הדבר נכון אבל אז עליהם ללמוד כללים נפרדים למשולשים, מלבנים, מקביליות וטרפזים הבנה אינסטרומנטלית טומנת בחובה התבוננות בשטחים אלה והתייחסותם לשטח המלבן עם זאת, רצוי לדעת את הכללים השונים, אין צורך להוכיחם ולקבלם כל פעם מחדש, אך הכרת הקשרים הפנימיים בין שטחי הצורות השונות מאפשרת לנו לזכור את הכללים כחלקים של יחידה שלמה מורכבת, דבר שהוא פשוט יותר אמנם, יש צורך בלימוד נוסף — לא רק של הכללים הנפרדים, אלא גם של הקשרים ביניהם, אך תוצאת הלמידה נשמרת בזיכרון לאורך זמן רב יותר לפיכך, יש צורך בפחות לימוד חוזר, ומשך הלימודים לאורך זמן עשוי להיות בסך הכל קצר יותר

הוראה לצורך הבנה רלציונית עשויה לכלול חומר רב יותר בתחילת המאמר צוטט ההסבר האינסטרומנטלי היקף העיגול $= \pi d$ כדי להביא להבנת נוסחה זו באופן רלציוני, יש ללמד תחילה (יחד עם עוד מושגים) את מושג היחס, דבר הלוקח זמן רב יותר מאשר הצגה פשוטה של הכלל אולם, למושג היחס יש טווח רחב של יישומים, ולכן גם מבחינה זו כדאי להשקיע זמן בהוראתו דבר זה קורה לעיתים קרובות במתימטיקה רלציונית מתברר, כי רעיונות הנדרשים להבנת נושא מסויים אחד מהווים בסיס לנושאים רבים אחרים המושגים כמו קבוצות, העתקות ושקילות הן דוגמאות לכך היתרונות שאפשר להשיג בהוראת מושגים אלה הולכים, לרוע המזל, לאיבוד כאשר מלמדים אותם כנושאים נפרדים ולא כמושגים בסיסיים, המקשרים בין שטחים שונים במתמטיקה

3 **ידע רלציוני עשוי להיות יעיל כמטרה בפני עצמה.**

נסיונית, המבוססת על תוצאות של ניסויים מבוקרים בהוראת חומר לא מתמטי הצורך בפרסים ועונשים חיצוניים קטן מאד, והמורה אינו חייב עוד להתאמץ כדי ליצור מוטיבציה אצל הלומדים דבר זה מתקשר לעובדה נוספת

4 **הסכימות הרלציוניות הן בעלות אופי אורגני.** זוהי הדרך הטובה ביותר בה אני יכול לתאר את העובדה, שהסכימות גדלות כמו מעצמן הקשר ל (3) טמון בכך, שכאשר אנשים נהנים מהבנה רלציונית, הם עשויים לנסות להבין בצורה רלציונית לא רק חומר חדש המוצג בפניהם, אלא אף יחפשו, באופן עצמאי, נושאים חדשים ויחקרו אותם הדבר דומה לעץ השולח שורשים או לחיה החוקרת סביבה חדשה בחיפושיה אחר מזון פיתוח רעיון זה מעבר לרמה של אנלוגיה חורג ממטרת מאמר זה, אך הוא חשוב מדי מכדי להתעלם ממנו

אם כל האמור לעיל מהווה הצגה נאותה של הטיעונים לטובת שני הצדדים, נראה כי הטיעון לטובת המתמטיקה האינסטרומנטלית תקף רק לטווח הקצר ולתכנים מוגבלים הוא איננו נכון לטווח הארוך ולחינוך השלם של הילד מדוע, אם כן, מלמדים ילדים רבים במשך כל שנות לימודיהם רק מתמטיקה אינסטרומנטליתי רק אם נוכל לענות על שאלה זו אפשר יהיה לשפר את המצב

לאחר שיקול דעת עשוי המורה לבחור במתמטיקה אינסטרומנטלית על־פי אחד או יותר מהנימוקים הבאים

1 נדרש זמן רב כדי להשיג הבנה רלציונית, בעוד שהתלמידים עשויים להזקק רק לטכניקה מסויימת,

2 הבנה רלציונית של נושא מסויים קשה מדי להשגה, אך התלמידים חייבים להכיר נושא זה לצורך מבחנים,

3 יש צורך במיומנות עבור מקצוע נוסף (למשל, מדע), עוד לפני שהסכימות הקיימות אצל התלמידים מאפשרות להם להבינן בצורה רלציונית,

4 המורה הוא צעיר וחסר ניסיון בבית ספר שבו כל ההוראה המתמטית היא אינסטרומנטלית

כל אלה, יחד עם ההנחה, כי המורה עושה את בחירתו "לאחר שיקול דעת" מרמזים על כך שהוא אכן מסוגל להכריע בין הוראה אינסטרומנטלית לבין הרלציונית לפי יתרונותיהם ובהתאם לתנאים הקיימים בשטח בחירה כזו, המבוססת על מידע, דורשת יכולת הבחנה ואף הבנה הרלציונית של המתמטיקה עצמה על־כן, ההבנה רלציונית היא זו שדרושה למורה, ואין להסתפק בפחות מכך עם

זאת עלינו להכיר בעובדה, שהבנה זו חסרה אצל הרבה מורים למתמטיקה, ואולי אפילו אצל רובם

להלן מספר גורמים התורמים לקושי בבחירת מתמטיקה רלציונית

1 **השפעתן של הבחינות.** מכיוון שלתוצאות הבחינות יש חשיבות רבה בבחירת מקצוע העתיד, קשה להאשים את התלמידים אם עיקר מטרתם היא הצלחה בבחינות השיטה שבה התלמידים לומדים מוכרחה להיות מושפעת על ידי המטרה שלקראתה הם שואפים, והיא לענות תשובות נכונות על מירב השאלות

2 **תוכנית לימודים עמוסה מדי.** חלק מהבעיה כאן הוא הדחיסות הגבוהה של המידע במתימטיקה משפט אחד במתימטיקה עשוי להכיל מידע שבמקצוע אחר מוצג בפיסקה שלמה, או אף יותר מזה מתמטיקאים הרגילים לטיפול ברעיונות המוצגים בדחיסות כה רבה אינם שמים לב לכך (זו עשויה להיות הסיבה שבגללה רוב המרצים במתמטיקה מלמדים מהר מדי) אנשים שאינם מתמטיקאים אינם מודעים לכך כלל ללא קשר לסיבה, כל תוכניות הלימודים תהיינה טובות יותר אם יתאימו את החומר המוכל בהן לזמן העומד לרשות המורה כדי ללמד אותו

3 **קשיים בהערכה.** קשה להעריך אם אדם מבין באופן רלציוני או אינסטרומנטלי הציונים שהשיג בבחינה אינם בסיס טוב למסקנות בדבר התהליך המנטלי שבאמצעותו הגיע התלמיד לפתרון בתנאים של הוראה בכיתה, שיחה עם התלמיד היא השיטה הטובה ביותר לבדיקה כזו, אולם, בכיתה שמספר התלמידים בה עולה על 30, קשה למצוא את הזמן לכך

4 **קושי פסיכולוגי גדול של המורים להתאים (לבנות מחדש) את הסכימות הקיימות אצלם זמן רב.** קושי זה קיים אפילו אצל המיעוט המכיר בעובדה שעליו לשנות את הסכימות — המיעוט שרוצה לעשות זאת ויש לו זמן להשקיע בלימודים להלן מצוטטות שלוש פיסקאות מתוך מאמר [3] של סר הרמן בונדי (Sir Herman Bondi) הדן בערכו המעשי והאינטלקטואלי של חינוך מתימטי (ואין ספק שהוא מתכוון למתמטיקה רלציונית)

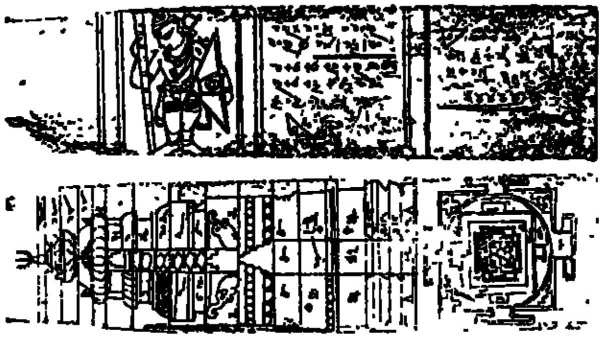
> בדברי השבח שלי למתמטיקה עד כה, חסרה נקודה חיונית דחייתה של המתימטיקה על ידי רבים, דחייה אשר הופכת במקרים מסויימים לפחדנות בזויה
>
> הגישה השלילית למתמטיקה, שלמרבה הצער, מאד מקובלת אפילו אצל בעלי השכלה גבוהה בשטחים אחרים, בוודאי מהווה אמת מידה מהימנה ביותר לכשלון שלנו, ומהווה סכנה אמיתית לחברתנו
>
> זהו הסימן הברור ביותר לכך, שמשהו במצב הקיים איננו כשורה לא קשה להאשים את החינוך, לפחות באופן חלקי, קשה יותר להצביע במדוייק על האשם, ועוד יותר קשה להציע פתרונות חדשים

אם נחליף את המילה "אשמה" במילה "גורם", אין ספק כי הכשלון הרחב ללמד מתמטיקה רלציונית — כשלון הקיים בבית הספר היסודי, בתיכון ובעל־תיכוני, בקורסים מודרניים ובקורסים מסורתיים — ניתן לזיהוי כגורם העיקרי לכך קשה להציע פתרונות חדשים, אך יש לקוות כי איתור הבעיה הוא צעד חשוב לקראת פתרונה צעד נוסף יוצע בסעיף הבא

ניסוח תאוריה

אין כלי היכול להשתוות בעוצמתו לתאוריה טובה, המדריכה פעילות של אנשים במצבים מורכבים ומאפשרת תיאום בין המאמצים שלך לבין אלה של אחרים כל המורים הטובים יוצרים לעצמם מאגרי מידע נסיוני ומתוכם הם בונים לעצמם עקרונות כלליים המדריכים אותם אולם, למרות שמידע זה קיים בצורת עקרונות, הוא עדיין נמצא ברמה אינטואיטיבית, ובידי אנשים בודדים מסיבה זו, וכן משום שאין מבנה רעיוני משותף שבמסגרתו אפשר לנסח עקרונות אלה, אין מידע זה ניתן להעברה לו היה זה אפשרי, ניתן היה לשלב את המאמצים האינדיבידואליים וליצור גוף ידע אחיד, אשר מורים חדשים היו יכולים להיעזר בו בהווה, רוב המורים צריכים ללמוד משגיאות של עצמם

ההבנה שלי של ההבדל בין שני סוגי הלמידה, שהובילה אותי למתמטיקה רלציונית ואינסטרומנטלית, נשארה במשך זמן מה ברמה אינטואיטיבית, אף על פי שהייתי משוכנע, כמו אנשים רבים שדיברתי עימם על הנושא, שההבדל ביניהן הוא בעל חשיבות גדולה רק בעת שעסקתי בשני מחקרים מקבילים הרגשתי בצורך לתת לעניין ניסוח מפורש "ההארה" הגיעה, בהפתעה, בעת כינוס ברגע שרואים את זה, הכל נראה פשוט למדי, ויש להתפלא מדוע לא חשבתי על כך קודם אבל, קיימים שני סוגים של פשטות זו של נאיביות, וזו, אשר על ידי חדירה אל מעבר להבדלים שטחיים יוצרת פשטות באמצעות האחדה סוג שני זה של פשטות הוא זה שתאוריה טובה עשויה להציע, והוא זה שקשה להשיגו



יש צורך להתחיל בדוגמה קונקרטית כשנסעתי בפעם הראשונה לשהות בעיר מסויימת, הכרתי במהירות מספר מסלולי נסיעה ולמדתי להגיע ממקום מגוריי למשרד של עמיתי שאיתו עבדתי, ממקום מגוריי למסעדת האוניברסיטה, מהמשרד של עמיתי למסעדה, ועוד כמה מסלולים בקיצור, למדתי מספר מוגבל של תוכניות קבועות, שבאמצעותן יכולתי להגיע מנקודות התחלה מסויימות אל נקודות מטרה מסויימות

כשהתפניתי מעט, התחלתי לסייר בעיר עתה, לא היתה לי מטרה מסויימת, אלא רציתי להתמצא בסביבה ותוך כדי כך לגלות דברים מעניינים בשלב זה מטרתי השתנתה לבנות במוחי מפה קוגניטיבית של העיר

שתי פעילויות אלה שונות זו מזו, אך לצופה מבחוץ קשה להבדיל ביניהן כל מי שראה אותי הולך מ A ל B, לא יכול היה לדעת (מבלי לשאול אותי) באיזו משתי הפעילויות עסקתי אבל הדבר החשוב ביותר בכל פעילות היא המטרה שלה במקרה אחד, מטרתי היתה להגיע למקום מסויים B במרחב, במקרה האחר, המטרה היתה להרחיב או לגבש את מפת העיר שבראשי, המשקפת את מצב הידע

אדם שבידיו מערכת קבועה של תוכניות יכול למצוא את דרכו ממספר נקודות התחלה לקבוצת מטרות מסויימות התכונה המאפיינת את התוכנית היא, שהיא אומרת לאדם מה לעשות בכל שלב פנה ימינה ליד הדלת, המשך ישר עד לכנסיה וכך הלאה אם בשלב כלשהו הוא יטעה, הוא ילך לאיבוד ולא ידע לאן ללכת, אלא אם כן יוכל לשוב על עקביו ולחזור למסלול הנכון לעומת זאת, אדם שבראשו קיימת תמונה של מפת העיר, יש בידו כלי שבעזרתו יוכל ליצור, בעת הצורך, מספר כמעט אינסופי של תוכניות, על פיהן יוכל לכוון את דרכו מכל נקודת התחלה לכל נקודת סיום רצויה, בהנחה ששתי הנקודות נמצאות בתמונה המנטלית שלו של מפת העיר אם יטעה בדרכו, ידע היכן הוא נמצא ויוכל לתקן את טעותו בלי ללכת לאיבוד, ואולי אף ללמוד מכך

האנלוגיה למתמטיקה היא ברורה למידה המובילה למתימטיקה אינסטרומנטלית היא זו המורכבת ממספר הולך וגדל של תוכניות, שבאמצעותן תלמידים מוצאים את דרכם מנקודות התחלה מסויימות (נתונים) אל נקודות סיום (התשובות לשאלות) התוכנית אומרת להם מה לעשות בכל שלב, כמו בדוגמה וכמו בדוגמה, **הדבר שיש לעשותו בשלב הבא נקבע רק על ידי התנאים המקומיים** (פנה ימינה ליד הדואר) לאחר פתיחת הסוגריים — כנס אברים דומים אין הבנה של הקשר בין השלבים השונים למטרה הסופית בשני המקרים, הלומד תלוי בהדרכה חיצונית כדי לגלות דרך חדשה "להגיע לשם"

כנגד זאת, למידה של מתימטיקה רלציונית מורכבת מיצירת מבנה מושגי (סכימה), שממנו יכול האיש (באופן עקרוני) ליצור מספר בלתי מוגבל של תוכניות תוכניות אלא יביאו אותו מכל נקודה הנמצאת בסכימה שלו לכל נקודת סיום (אמרתי "באופן עקרוני", כי עשויים להיות מסלולים קשים ליצירה) למידה כזו שונה מלמידה אינסטרומנטלית בכמה נקודות

1 האמצעים נעשים בלתי תלויים בנקודות הסיום המסויימות שיש להגיע אליהן

2 תהליך יצירת הסכימה בתוך גוף ידע מסויים הופך למטרה מספקת בפני עצמה

3 ככל שהסכימה של התלמיד שלמה יותר, כן גדלה הרגשת הבטחון שלו ביכולתו למצוא דרכים חדשות "להגיע לשם" ללא עזרה חיצונית

4 עם זאת, סכימה לעולם איננה שלמה ככל שהסכימה מתרחבת, כך גדלה התחושה של מספר האפשרויות העומדות בפנינו על־כן, תהליך צמיחת הסכימה כמו מזין עצמו ואף הופך למקור של סיפוק מתמיד

אטול לרגע שנית את תפקיד הקטגור ואשאל האם אמנם אנו עוסקים בשני נושאים שונים, מתמטיקה רלציונית ומתמטיקה אינסטרומנטלית, או שמא אלה הן שתי דרכי חשיבה שונות באותו נושאי נעזר באנלוגיה אם נתייחס לשני התהליכים שתארנו כאל שתי דרכים שונות להכיר אותה עיר ההבחנה בין הבנה רלציונית והבנה אינסטרומנטלית תשאר אז תקפה, ואילו ההבחנה בין מתמטיקה רלציונית למתמטיקה אינסטרומנטלית תאבד את תוקפה

אולם, מה שמרכיב את המתמטיקה איננו תוכן הנושאים שיש בה, אלא האופי המיוחד של הידע שיש בנושאים אלה התכנים במתמטיקה רלציונית ובמתמטיקה אינסטרומנטלית עשויים להיות זהים מכוניות הנוסעות בין שתי ערים במהירות קבועה, מגדלים אשר יש לחשב את גובהם, גופים הנופלים אל פני כדור הארץ בנפילה חופשית וכו' אולם, שני סוגי הידע שבהן הם כה שונים זה מזה, עד כי אפשר להתייחס אליהן כאל שני סוגים שונים של מתמטיקה אם נקבל הבחנה זו, אזי המילה "מתמטיקה" אכן מתגלה כ"חבר מדומה" להרבה ילדים (העלולים לשלם על כך מחיר גבוה)

תמונת מצב

מאמר זה ארוך למדי, ובכל זאת משאיר נושאים רבים לפיתוח נוסף לא הסברנו במפורש כיצד ליישם את התאוריה שהוצעה בסעיף הקודם לפתרון בעיות החינוכיות שתארנו בשני הסעיפים הראשונים אחת מהן היא היחס שבין המטרות של המורה לבין אלה של התלמיד בעיה אחרת היא, מה משמעות התאוריה עבור תוכנית הלימודים במתמטיקה

במהלך דיונים ברעיונות אלה עם מורים ומרצים בחינוך מתמטי, הועלו מספר נקודות מעניינות, שלא כאן המקום לדון בהן אחת מהן היא האם רצוי להשתמש במושג "מתמטיקה" רק במשמעות רלציונית אני אוהב גישה זו, אך הבעיה איננה כה פשוטה כפי שהיא נראית

למאמר זה שתי מטרות האחת, להציג במפורש את הבעיה ברמת חשיבה נסיונית, ועל ידי כך למקד את תשומת הלב בשאלה המרחפת אצל רבים מאיתנו זה זמן רב השנייה, לנסח בעיה זו כך שאפשר לקשר בינה לבין הידע התאורטי הקיים על תהליכי למידה מתמטיים, ואף להמשיך לחקור אותה ברמה זו תוך ניצול ההכללות והעוצמה שרק תיאוריה יכולה לספק

רשימת ספרות

[1] R R Skemp, **Understanding Mathematics**, (U L.P)

[2] R R Skemp, **The Psychology of Learning Mathematics**, Penguin 1972, pp 43-46

[3] H Bondi, **The Dangers of Rejecting Mathematics**, Times Higher Education Supplement, 26.3.1976