



מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט



אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך



משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

כיצד לסרטט אסימפטוטה משופעת, ממקרה בכיתה לחקירה מעניינת

מדור: זה קרה לי בכיתה
כתבה: קלרה זיסקין
תקציר: במאמר מתוארת סצנה מתוך שיעור מתמטיקה בה תלמידה מציגה דרך שונה ומפתיעה למציאת אסימפטוטה משופעת. האם התלמידה צודקת? הניתן להוכיח את נכונות השיטה עבור משפחת הפונקציות הרציונאליות? על כל אלה במאמר.

מילות מפתח: אסימפטוטה משופעת, אסימפטוטה אנכית, נקודות קיצון, אמצע קטע, פונקציה רציונאלית, מרכז סימטריה, מקום גיאומטרי.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 63.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע ע"י אוניברסיטת חיפה עפ"י מכרז מס' 6/1.07
הפרויקט מבוצע עבור האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8240757

אתר: <http://highmath.haifa.ac.il>

דוא"ל: hmathctr@construct.haifa.ac.il

כיצד לסרטט אסימפטוטה משופעת ממקרה בכיתה לחקירה מעניינת

קלרה זיסקין

- אז למה 'הלכת' דווקא שתי משבצות? - שאלתי.

- מכיוון שנקודת המינימום (6, 9) נמצאת במרחק של שתי משבצות מהאסימפטוטה האנכית $x = 4$.

- מיקה, לא ענית לי, למה הנקודות שבחרת נמצאות על האסימפטוטה המשופעת? - המשכתי.

- אני לא יודעת, אבל כך סרטטתי את כל הגרפים משעורי הבית שנתת לנו אתמול. מה, הדרך שלי לא נכונה?

"שיטת הפתרון תהיה טובה, אם מהתחלה נוכל לחזות, ובהמשך להוכיח, שאם נצמד לשיטה זו, נגיע בהצלחה לפתרון הבעיה." (Leibnitz G.W. "Opuscles")

פעם, בשיעור חזרה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, נתתי לתלמידים את המשימה הבאה:

חקרו את הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 4}$ וסרטטו את סקיצת

הגרף, כולל אסימפטוטות.

אחרי שבע (!) דקות עבודה, תלמידה בשם מיקה הכריזה:

- יש, עשיתי!

- תני לי לראות, איזה גרף התקבל? - ביקשתי.

- בבקשה! - מיקה חייכה לקראתי.

מיד ראיתי שהגרף נכון. מיקה סרטטה אותו על דף משובץ וציינה:

■ שתי נקודות קיצון: מינימום בנקודה (6, 9), ומקסימום בנקודה (2, 1)

■ שתי נקודות חיתוך עם הצירים: (0, 0) ו- (3, 0)

■ שתי אסימפטוטות: האנכית $x = 4$ ועוד אחת, משופעת (ראה איור 1 בהמשך)

- ומהי המשוואה של האסימפטוטה המשופעת? - שאלתי.

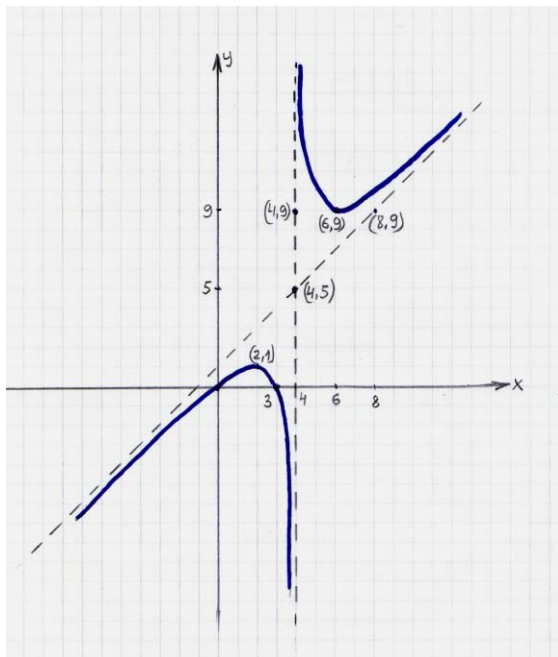
- אין לי אותה, אבל זה לא בעיה! הרי יש לי שתי נקודות על האסימפטוטה ואני יכולה בקלות למצוא את המשוואה - מיקה נשמעה בטוחה בעצמה.

- אילו שתי נקודות? - שאלתי, הייתי מופתעת, כיצד יכלה מיקה לסרטט את האסימפטוטה המשופעת ללא המשוואה.

- הנקודות הן: (8, 9) ו- (4, 5), והמשוואה היא, - מיקה ביצעה מספר חישובים, - המשוואה של האסימפטוטה המשופעת היא: $y = x + 1$!

- יפה מיקה - אמרתי, - רק תסבירי לי, בבקשה, למה בחרת דווקא בנקודות אלה? איך ידעת שהן נמצאות על האסימפטוטה?

- פשוט מאוד - אמרה מיקה - הנקודה (4, 5) היא אמצע הקטע שבין שתי נקודות הקיצון, והנקודה (8, 9) נמצאת במרחק של שתי משבצות ימינה, לאורך הישר $y = 9$, מנקודת המינימום (6, 9).



איור 1: הסרטוט של מיקה

אמרתי למיקה, שכנראה, "השיטה" שלה לבניית אסימפטוטה משופעת מתאימה רק לקבוצה מיוחדת של פונקציות רציונאליות. הייתי מאוד מופתעת, אני מלמדת הרבה שנים, ואף פעם לא ראיתי בנייה מסוג זה. כבר באותו היום התחלתי לבדוק האם ניתן להוכיח את נכונותה של 'השיטה' של מיקה ובמהלך הבדיקה מצאתי מספר תכונות מעניינות של פונקציות רציונאליות שצורתן:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{mx + n}$$

דרך לא שגרתית למציאת אסימפטוטה משופעת: בעזרת שתי נקודות.

בהתאם לתכונות אלה, המוצגות בסיום ההוכחה, השיטה של מיקה נכונה בהחלט.

להלן מובאת ההוכחה

ניקח פונקציה רציונאלית שצורתה:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{mx + n} \quad \text{כאשר } amc > 0.$$

לפונקציה שתי אסימפטוטות: אנכית, שמשוואתה $x = -\frac{n}{m}$,

ומשופעת $y = ax + b$, ושתי נקודות קיצון - מינימום ומקסימום.

נניח, שהנקודה (x_0, y_0) היא נקודת החיתוך של שתי האסימפטוטות.

נבנה מערכת צירים חדשה, עם ראשית בנקודה (x_0, y_0) , כך שהצירים החדשים יהיו מקבילים לצירים של המערכת המקורית. במערכת הצירים החדשה המשוואה של הפונקציה מקבלת את הצורה הבאה:

$$y = a \cdot \left(x + \frac{k}{x} \right) \quad \text{או} \quad y = ax + \frac{d}{x} \quad \text{כאשר } k > 0.$$

המקדם a מסמן את המתחה (כאשר $a < 1$), או את הכיוון (כאשר $a > 1$) של הגרף לאורך ציר ה- y . נניח כי $a = 1$ ונקבל

את משוואת הפונקציה פשוטה יותר: $y = x + \frac{k}{x}$.

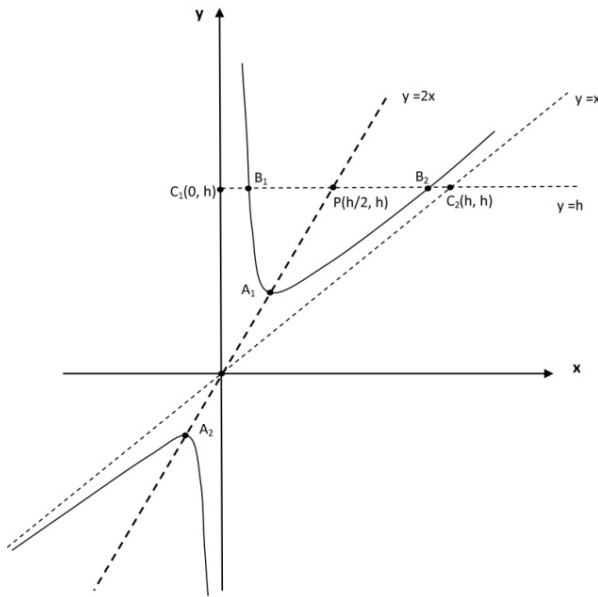
לפונקציה שתי אסימפטוטות: $y = x$, ו- $x = 0$, ושתי נקודות קיצון, מינימום ומקסימום, בנקודות:

$$A_1(\sqrt{k}, 2\sqrt{k}), \quad A_2(-\sqrt{k}, -2\sqrt{k})$$

קו ישר $y = 2x$ עובר דרך שתי נקודות הקיצון. גם נקודת החיתוך של שתי האסימפטוטות נמצאת על ישר זה. נקודה זו $(0, 0)$ היא מרכז הסימטריה של הגרף.

כעת נעביר קו ישר, המקביל לציר ה- x : $y = h$, ונמצא את נקודות החיתוך שלו עם הישרים: $y = x$, $x = 0$, $y = 2x$. הנקודות הן:

$$C_1(0, h), \quad C_2(h, h), \quad P\left(\frac{h}{2}, h\right), \quad \text{בהתאמה, (ראה איור 2)}.$$



איור 2

קל לראות שהנקודה P היא אמצע הקטע C_1C_2 . אותו קו ישר

$y = h$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות: $B_1(x_1, h)$ ו-

$B_2(x_2, h)$, כאשר x_1, x_2 הם שורשי המשוואה:

$$x^2 - hx + k = 0 \quad \text{או} \quad x + \frac{k}{x} = h$$

$$\text{מהשוויון } x_1 + x_2 = h, \text{ נובע כי } \frac{h}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

לכן הנקודה P היא אמצע הקטע B_1B_2 .

מהתוצאות שקיבלנו ניתן לסכם, כי:

- נקודת החיתוך של האסימפטוטות היא **מרכז הסימטריה** של גרף הפונקציה.
- נקודות הקיצון של הפונקציה ומרכז הסימטריה נמצאות על אותו קו ישר.
- ישר זה הוא **מקום גיאומטרי** של נקודות האמצע של קטעים אופקיים, שקצותיהם נמצאים על האסימפטוטות.
- אותו הישר, המחבר את מרכז הסימטריה עם נקודות הקיצון, הוא **מקום גיאומטרי** של נקודות האמצע של קטעים אופקיים, שקצותיהם נמצאים על גרף הפונקציה.

כל זה נכון לגבי גרף הפונקציה מהצורה: $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$).

מכיוון שהמסקנות שלעיל אינן משתנות, כאשר גרף הפונקציה עובר שינויים בתוך מערכת הצירים, כמו, הוצה מתיחה או כיווץ, אפשר להשליך את המסקנות האלה על כל משפחת הפונקציות שמשוואתה הכללית היא:

אסיים במילים של ג'ורג' פוליה (George Polya, 1887-1985), אחד מגדולי המחנכים המתמטיים בתקופה המודרנית, שהגדיר תהליך של פתרון בעיה כך:

"תהליך פתרון בעיה הוא בעצם חיפוש דרכי מילוט ממצב מסובך, זהו תהליך השגת המטרה, שאינה נראית מהתחלה כמושגת בקלות. פתרון הבעיה הוא אחת מהסגולות של התבונה, והתבונה היא אחת מהתשורות של בני האנוש, לכן, ניתן ליחס את פתרון הבעיה לאחת התכונות של הפעילות האנושית. פתרון בעיות הוא סוג של מיומנות מעשית, דומה לשחייה, לגלישה בשלג או לנגינה בפסנתר, ניתן ללמוד את המיומנויות הללו, במידה ותהיה לנו דוגמה טובה לחיקוי ואפשרות לאימונים רבים. נזכור דבר חשוב: אם רוצים ללמוד לשחות, צריך להיכנס ללא חשש למים, ואם רוצים ללמוד לפתור בעיות – יש לפתור אותן!

השתדלו להפיק תועלת מרבית מהמאמצים שאתם משקיעים בפתרון הבעיה, שימו לב לפרטים חשובים, תצטרכו אותם בעתיד או בפתרון בעיות אחרות. את הפתרון שהגעתם אליו בכוחות עצמכם, בעזרת ספר או בעזרת אמצעי כלשהו אחר, והבנתם והפנמתם אותו, תוכלו להפוך לשיטה בה תשתמשו בפתרון בעיות אחרות."

ברצוני להודות לד"ר אלה שמוקלר שקראה את המאמר והעירה הערות מועילות בנושא ההוכחה.

מקורות:

Polya G. (1965). *Mathematical Discovery*. New York, London.

קלרה זיסקין

מורה למתמטיקה ביחידה הקדם אקדמית באוניברסיטת חיפה.
חברה בצוות המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי

$$y = ax + b + \frac{c}{mx + n} \quad (amc > 0)$$

בשיעור הבא ביקשתי ממיקה להדגים לפני תלמידי הכיתה את השיטה שלה. התפתח דיון: "האם השיטה נוחה לשימוש?" חלק מהתלמידים אמרו שהשיטה נוחה רק כאשר שיעורי נקודות הקיצון הם מספרים שלמים. כולם התרגשו מהעובדה שחברה לספסל הלימודים שלהם המציאה שיטה חדשה, שיטה שלא מופיעה בספרי הלימוד. התלמידים שאלו אותי האם אפשר להשתמש בשיטה של מיקה במבחנים. עניתי, כן, בתנאי אחד, שמישהו יזכיר שהשיטה 'עובדת' למשפחת הפונקציות מהצורה:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{mx + n}$$

ואכן, זה קרה, מיקה ועמית (תלמיד מאותה הכיתה) לקחו על עצמם את העבודה. כעבור מספר ימים הם סיימו את הוכחה. היא לא הייתה פשוטה. עמית ומיקה התמודדו עם פישוטים אלגבריים די מסובכים. הדרכתי אותם שניתן להקל על תהליך ההוכחה על-ידי מעבר למשוואת פונקציה פשוטה יותר (ראה הוכחה לעיל). זאת לא הייתה עבודת המחקר הראשונה של התלמידים שלי. לעתים קרובות, במהלך שנת הלימודים, אני מבקשת מהתלמידים לעשות מחקרים קטנים ולהציגם לפני חבריהם לכיתה. לפעמים אני עוזרת להם בבחירת הנושא, לפעמים הנושא 'מתגלה' בעצמו, כמו במקרה זה.

מה אני, כמורה, "הרווחתי" מהמקרה?

בנוסף להצגת המקרה בכיתות הבאות שלי, אוכל לתת לתלמידים משימות מעניינות המקשרות שני תחומים מתמטיים: חשבון דיפרנציאלי וגיאומטריה אנליטית. הנה דוגמה:

$$f(x) = \frac{x^2}{2-x}$$

א. חקור את הפונקציה וסרטט את סקיצת הגרף שלה, כולל אסימפטוטות.

ב. קו ישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות M ו- N . הוכח כי, המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים NM הוא ישר העובר דרך נקודת החיתוך של שתי האסימפטוטות, האנכית והמשופעת.

ג. קו ישר $y = t$ חותך את שתי אסימפטוטות, אנכית ומשופעת, בשתי נקודות P ו- S . הוכח כי, המקום הגיאומטרי של אמצעי הקטעים PS הוא ישר העובר דרך שתי נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מהו הקשר בין שני המקומות הגיאומטריים שבסעיפים ב' ו-ג'?