



מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט



אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך



משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

פתרונות נכונים ושגויים לבעיה

טריגונומטריה במישור, חלק ראשון: מחשבות

על משפט הסינוסים

מדור:

מהמחקר בחינוך מתמטי

כתבו:

אביגיל (גלי) פרקש ופסיה צמיר

תקציר:

מאמר זה הוא הראשון מבין שני מאמרים העוסקים בפתרונות נכונים ושגויים של תלמידים, לבעיות במישור הניתנות לפתרון באמצעות משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים. במאמר זה מוצגים פתרונות שונים לבעיה סטנדרטית אחת, מהם נוכל ללמוד על דרכי חשיבה של תלמידים ועל שגיאות אופייניות, וכן להעמיק ולחדד את הידע המתמטי של תלמידים ומורים בנושא זה. המאמר מתמקד בשגיאות הקשורות לשימוש במשפט הסינוסים, אשר עלו בפתרונות של תלמידים לבעיה אחת שניתנה בבחינת בגרות בחורף תשס"ה, ברמת 4-5 יח"ל.

מילות מפתח: טריגונומטריה, משפט הסינוסים, משפט הקוסינוסים, גיאומטריה, משולשים,

משפטי חפיפה, משוואה טריגונומטרית, שגיאות, משולש חסום במעגל.

החומר פורסם במסגרת: על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 81.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 6 עמודים.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע ע"י אוניברסיטת חיפה עפ"י מכרז מס' 6/1.07
הפרויקט מבוצע עבור האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס: 04 - 8240757

אתר: <http://highmath.haifa.ac.il>

דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il

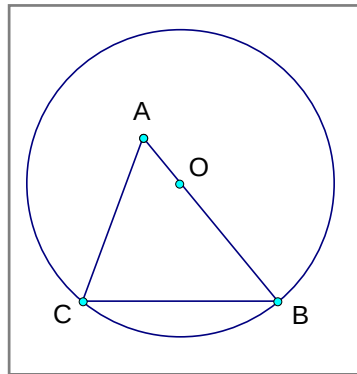
פתרונות נכונים ושגויים לבעיה

טריגונומטריה במישור

חלק ראשון: מחשבות על משפט הסינוסים

פסיה צמיר

אביגיל (גלי) פרקש



סרטוט 1

כאמור, הצגנו בעיה זו לתלמידים ולמורים רבים. נמצא כי כל המורים פתרו נכון את כל סעיפי הבעיה, וכי מרבית התלמידים חישובו נכון את רדיוס המעגל בסעיף א' (משפט הקוסינוסים ב- $\triangle AOC$, $CO = r = 21.17$). לסעיף ב' הציגו התלמידים פתרונות שונים - נכונים ושגויים. עוד נמצא כי למרות שהמורים פתרו נכון את כל סעיפי הבעיה, במקרים לא מעטים הם התקשו להצביע במדויק על המקום שבו שגו התלמידים, ולא הצליחו לנתח חלק מהשגיאות.

במאמר נציג ארבעה פתרונות שונים לסעיף ב', המסתמכים על התוצאה שהושגה בסעיף א' ופתרון נוסף הכולל את סעיפים א' ו-ב' ביחד. לא נתייחס לסעיף ג'. פתרון ראשון (I) נכון, קצר ואלגנטי, והוא שהוצג על-ידי כל המורים ועל-ידי מרבית התלמידים (בחרנו שלא לדווח על פתרונות נכונים נוספים). ארבעת הפתרונות הבאים (II, III, IV, V) שגויים. השגיאה השכיחה, שנעשתה על-ידי כרבע מהתלמידים, מתוארת בפתרון השני (II). בהמשך נראה כיצד ניתן להעמיק את הידע המתמטי על-ידי ניתוח כל אחת מהשגיאות.

הפתרונות

1. פתרון ראשון

פתרון נכון, פתרון המתבסס על משפט הקוסינוסים:

מכור כי רדיוס המעגל $C = OB = 21.17$ ס"מ

מאמר זה הוא הראשון מבין שני מאמרים העוסקים בפתרונות נכונים ושגויים של תלמידים, לבעיות במישור הניתנות לפתרון באמצעות משפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים. במאמר זה נתמקד בשגיאות הקשורות לשימוש במשפט הסינוסים, אשר עלו בפתרונות של תלמידים לבעיה אחת שניתנה בבחינת בגרות במתמטיקה בחורף תשס"ה (שאלון 035005 המיועד לתלמידי 4-5 יח"ל). בבחינה זו בחרו תלמידים רבים לפתור את הבעיה בנושא טריגונומטריה במישור. כשיצאו התלמידים מהבחינה, גילינו כי התקבלו תוצאות שונות, אשר נבעו ממהלכי פתרון שונים. להלן נראה פתרון אלגנטי ויעיל שהציגו תלמידים, ננתח פתרונות שגויים של תלמידים, ונבחן כלי בקרה שיכולים לעזור לפותרים לקבל החלטות לגבי צעדים נכונים ושגויים, בעת התרת בעיות מסוג זה. ברצוננו לציין כי ניתוח הפתרונות השגויים, העמיק את התובנות המתמטיות של תלמידים ושל מורים עימם דנו בשאלה: "כיצד קובעים נכונות ואי-נכונות של פתרון בבעיות בנושא טריגונומטריה במישור". אנו מקווים שקוראים נוספים יוכלו לחדד את נקודת מבטם בסוגיה זו. נידוע, נושא הטריגונומטריה תופס מקום נרחב בתכנית הלימודים בחטיבה העליונה (חוזר מפמ"ר מתמטיקה, 2005), אולם, סקירה של הספרות המקצועית העלתה מחקרים מעטים בנושא שגיאות אופייניות של תלמידים בתחום זה, ועל כן מעניין לנתח את הפתרונות שהתקבלו לבעיה זו.

הבעיה

בסרטוט נתון משולש ABC, הקדקודים B ו-C נמצאים על

מעגל O. הצלע AB עוברת דרך הנקודה O.

נתון: $\angle CAB = 60^\circ$, $AO = 8$ ס"מ, $AC = 24$ ס"מ

א. יש לחשב את רדיוס המעגל.

ב. מהו גודל $\angle BFC$?

ג. המשך AB חותך את המעגל בנקודה F, יש לחשב את גודל הזווית $\angle BFC$ (ראה סרטוט 1).

ו- $\alpha - 180^\circ$), כיוון שתחום הפתרונות הוא $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. הפותרים בשיטה זו שגו, כשהציגו למשוואה רק פתרון אחד (זה הניתן על-ידי המחשבון) המתייחס לזווית α כאל זווית חדה.

קלנובר (1996) מצאה שבמהלך פתרון משוואות טריגונומטריות כלליות, תלמידים רבים מתעלמים מהמחזור ומצינים פתרון יחיד, או את שני הפתרונות במחזור הראשון. גם תלמידים המצינים את המחזור, שוגים באופנים שונים, למשל, במשוואה $\sin x = 0.5$ רשמים כפתרון רק $x = 30^\circ + 360^\circ k$, ואינם רשמים $x = 150^\circ + 360^\circ k$.

אם שגינה? איך נדע? הבדיקה נעשית, בדרך כלל, על-ידי ניסיון להפעיל משפטים/חוקים גיאומטריים במשולש הנתון. אולם במקרה זה אין סתירה בין המשפטים הגיאומטריים המקובלים לבדיקת בעיות אלה (למשל, "במשולש, מול הצלע הגדולה מונחת הזווית גדולה, ומול הצלע הקטנה מונחת הזווית הקטנה" ו- "סכום זוויות במשולש שווה 180° "), לבין התוצאה שהתקבלה. מכאן שכוח הבקרה לפתרון שגוי זה מוגבל. כלומר, תלמיד ששגה באופן המתואר, ושכח שהמשוואה הטריגונומטרית בעלת שני פתרונות, יתקשה מאוד להבחין בטעותו. גם מורים מנוסים שבחנו פתרון זה, התקשו להצביע במדויק על מקום השגיאה. בעניין זה, מכיר את המלצתו של Stanton (1993), שעשויה להיתפס כדרך התנהלות בבחינה ולא כדרך מתמטית, כי ניתן לפתור את הבעיה על-ידי שימוש במשפט הסינוסים ב- $\triangle AOC$, אם מחפשים את הזווית

$$\frac{8}{\sin \angle ACO} = \frac{21.17}{\sin 60^\circ} \quad \text{שמול הצלע הקטנה:}$$

ואז: $\angle ACO = 19.11^\circ$. זווית זו אינה יכולה להיות זווית קרה, וכך, גם תלמיד ששוכח את האפשרויות של $\alpha - 180^\circ$, מקבל תוצאה נכונה למשוואה הטריגונומטרית.

III. פתרון שלישי

שימוש במשפט הסינוסים ללא הכרעה בין שתי הזוויות:

$$\frac{24}{\sin \angle O_1} = \frac{21.17}{\sin 60^\circ} \quad \text{(1) } \triangle AOC \text{ משפט הסינוסים:}$$

$$\sin \angle O_1 = 0.98$$

$$\angle O_1 = 79.11^\circ \text{ או } \angle O_1 = 180^\circ - 79.11^\circ = 100.89^\circ \quad (2)$$

$$\angle O_2 = 180^\circ - 100.89^\circ = 79.11^\circ \quad (3)$$

$$\angle O_2 = 180^\circ - 79.11^\circ = 100.89^\circ \quad \text{או:}$$

$$AB = 8 + 21.17 = 29.17 \quad (1)$$

(2) ב- $\triangle ABC$ משפט הקוסינוסים:

$$CB^2 = 24^2 + 29.17^2 - 2 \cdot 24 \cdot 29.17 \cdot \cos 60^\circ$$

$$CB^2 = 726.67$$

$$CB = 26.96 \text{ ס"מ} \quad (3)$$

זהו פתרון קצר ויעיל המתבסס על שוויון הרדיוסים במעגל ועל משפט טריגונומטרי: משפט הקוסינוסים למציאת צלע, במצב שבו נתונות 2 צלעות והזווית הכלואה ביניהן (צ.ז.צ.).

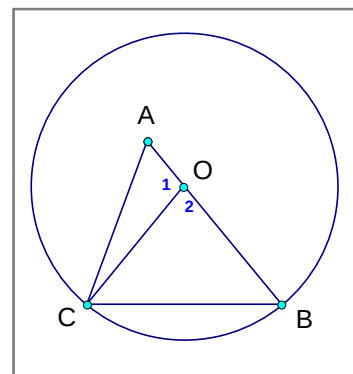
פתרונות שגויים שהוצגו על-ידי תלמידים

בפתרונות אלה נשתמש בסימונים: $\angle AOC = \angle O_1$,

$$\angle COB = \angle O_2$$

II. פתרון שני

שימוש במשפט הסינוסים ללא התייחסות ל- $\alpha - 180^\circ$:



סרטוט 2

$$\frac{24}{\sin \angle O_1} = \frac{21.17}{\sin 60^\circ} \quad \text{(1) } \triangle AOC \text{ משפט הסינוסים:}$$

$$\sin \angle O_1 = 0.98$$

$$\angle O_1 = 79.11^\circ \quad (2)$$

$$\angle O_2 = 180^\circ - 79.11^\circ = 100.89^\circ \quad (3)$$

(4) $\triangle BCO$ משפט הקוסינוסים:

$$CB^2 = 21.17^2 + 21.17^2 - 2 \cdot 21.17 \cdot 21.17 \cdot \cos 100.89^\circ$$

$$CB^2 = 1065.27$$

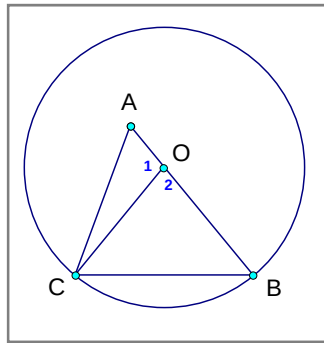
$$CB = 32.64 \text{ ס"מ} \quad (5)$$

ניתוח השגיאה:

בשלב (2) של הפתרון, עלתה השגיאה הבאה: משפט הסינוסים ב- $\triangle AOC$ מוביל למשוואה טריגונומטרית בעלת שתי תוצאות α

iv. פתרון רביעי

משפט הסינוסים במשולש שאינו חסום במעגל



סרטוט 3

$\triangle AOC$ משפט הסינוסים, לפי סעיף א' של הבעיה, בו מצאנו $R = 21.17$

$$\sin \angle O_1 = 0.567 \leftarrow \frac{24}{\sin \angle O_1} = 2 \cdot 21.17 \quad (1)$$

$$\angle O_1 = 34.54^\circ \quad (2)$$

$$\angle O_2 = 180^\circ - 34.53^\circ = 145.46^\circ \quad (3)$$

$\triangle BCO$ משפט הסינוסים:

$$CB^2 = 21.17^2 + 21.17^2 - 2 \cdot 21.17 \cdot 21.17 \cdot \cos 145.46^\circ$$

$$CB^2 = 1634.67$$

$$CB = 40.42 \text{ ס"מ} \quad (5)$$

ניתוח השגיאות: השגיאה הראשונה מצויה בשלב (1) של הפתרון. שימוש במשפט הסינוסים, המקשר בין משולש לבין קוטר המעגל החוסם אותו, למרות ש- $\triangle AOC$ אינו חסום במעגל. ובנוסף, כמו בפתרון השני (II), גם הפותרים בשיטה זו שגו, כשהציגו למשוואה רק פתרון אחד (זה הניתן על-ידי המחשבון) והמתייחס לזווית α כאל זווית חדה.

מובשוביץ-הדר, ענבר וזסלבסקי (Movshovitz-Hadar, Inbar & Zaslavsky, 1986) מצאו כי תלמידים נוטים לשגות בשל עיוות במשפט או בהגדרה. הם התייחסו, למשל, לשתי שגיאות נפוצות; האחת, שימוש שגוי במשפט הסינוסים

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

שהמשולש אינו חסום במעגל R , והשנייה, שימוש שגוי במשפט הסינוסים בשני משולשים שונים, כלומר, $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, שייכים למשולשים שונים.

האם שגינה? איך נדע? מכיוון שהשגיאה בשלב הראשון, אין אפשרות לתקן, אלא יש צורך להתחיל את הפתרון בדרכ אחרת.

(4) $\triangle BCO$ משפט הקוסינוסים:

$$CB^2 = 21.17^2 + 21.17^2 - 2 \cdot 21.17 \cdot 21.17 \cdot \cos 100.89^\circ$$

$$CB^2 = 1065.27$$

תוצאה ראשונה: $CB = 32.64 \text{ ס"מ}$

(5) $\triangle BCO$ משפט הקוסינוסים:

$$CB^2 = 21.17^2 + 21.17^2 - 2 \cdot 21.17 \cdot 21.17 \cdot \cos 79.11^\circ$$

$$CB^2 = 726.99$$

תוצאה שנייה: $CB = 26.96 \text{ ס"מ}$

ניתוח השגיאה: כמו בפתרון הקודם השגיאה מצויה בשלב (2) של הפתרון, שבו פותרים את המשוואה הטריגונומטרית. הפותרים בשיטה זו, אמנם, הציגו למשוואה את שתי התוצאות האפשריות, אולם בתנאים הקיימים, יש לפסול את אחת התוצאות. השגיאה בכך שהם לא הבחינו שב- $\triangle AOC$ נתונות שלוש הצלעות וזווית, ועל-כן חייבים לבחור רק באחת משתי תוצאות המשוואה.

האם שגינה? איך נדע? בידיעה שלבעיה זו פתרון יחיד, ברור

כי יש לבחור בין שתי תוצאות המשוואה הטריגונומטרית. כיוון שקשה לבצע בחירה זו באמצעות משפטים גיאומטריים, נשתמש בבקרה טריגונומטרית. שימוש חוזר במשפט הסינוסים מאפשר בחירה בין שתי התוצאות עבור $\angle O_1$, שהרי היחס שבין צלע במשולש לבין סינוס הזווית מולה קבוע עבור **שלוש** צלעות

המשולש $\left(\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \right)$. הפותרים בשיטה זו, היו

צריכים לחשב את שתי האפשרויות עבור $\angle ACO$

$$\frac{21.17}{\sin 60^\circ} \text{ שווה } \angle C = 40.89^\circ \text{ או } \angle C = 19.11^\circ, \text{ ולבדוק האם } \frac{21.17}{\sin 60^\circ}$$

$$\text{ל- } \frac{8}{\sin 40.89^\circ} \text{ או ל- } \frac{8}{\sin 19.11^\circ}. \text{ החישוב מראה כי}$$

$$\frac{21.17}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 19.11^\circ}, \text{ כלומר, } \angle C = 19.11^\circ \text{ ולכן}$$

$\angle O_1 = 100.89^\circ$. המשך הפתרון בעזרת משפט הקוסינוסים

כנ"ל, אך תתקבל תוצאה יחידה. להכללת התהליך נדגיש כי הבחירה בין שתי תוצאות המשוואה אינה גיאומטרית אלא טריגונומטרית.

דע התלמידים

נקודות החזק שזיהינו בפתרונות התלמידים היו:
(א) יישום משפט הסינוסים - התלמידים השתמשו ביחס הקבוע שבין צלע לבין סינוס הזווית שמולה (פתרונות II, III, IV).
(ב) יישום משפט הקוסינוסים, במצב שבו מחשבים צלע כשנתונים במשולש צ.ז.צ. (פתרונות I, II, III, IV).
(ג) יישום תכונות ומשפטים גיאומטריים: "רדיוסים במעגל שווים זה לזה" (פתרונות I, II, III, IV), ו"סכום זוויות צמודות הוא 180° " (פתרונות II, III, IV).

קשיים שהתגלו

1. בעת יישום משפט הסינוסים הגיעו הפותרים למשוואה טריגונומטרית מסוג $\sin \alpha = c$, בעלת שתי תוצאות בתחום $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. שני קשיים קשורים לפתרון משוואה זו ולמשתמע ממנו:
(א) תלמידים רבים הציגו למשוואה רק פתרון אחד (זה הניתן על-ידי המחשבון), שבו α זווית חדה (פתרונות II, IV).
(ב) תלמידים אחרים הציגו לבעיה שני פתרונות, למרות שהנתונים העידו על-כך שהמשולש מוגדר מבחינת נתוני הצלעות (פתרון III). ניתן לשער סיבות שונות לשגיאה זו: קושי של הפותרים לקבוע את מספר הפתרונות האפשריים בנסיבות הבעיה. הפותרים לא הציגו, למשל, את הניתוח הבא: אם נתון משולש מוגדר היטב, בהתאם למשפטי החפיפה (צ.ז.צ או צ.צ.ז, או צ.צ.ז. מול הצלע הגדולה בין השתיים), יהיה לבעיה פתרון אחד ויחיד. בכל מצב אחר ייתכנו שני פתרונות (הכוונה למשולש שנתונים בו צ.צ.ז, או לשילוב בין נתונים במשולש לבין נתונים במעגל החוסם אותו). קושי נוסף הוא הקושי של הפותרים לבחור בין שתי תוצאות המשוואה הטריגונומטרית, אם משום שלא מצאו לנכון לבדוק, ואם משום שהבקרה הגיאומטרית המקובלת אינה יעילה במקרה זה.

2. תלמידים השתמשו במשפט הסינוסים, המקשר בין משולש לבין קוטר המעגל החוסם אותו, לגבי משולש שאינו חסום במעגל (פתרונות IV, V). שגיאה זו עלולה לבוע משני מקורות - גיאומטרי (ייתכן שעבור תלמידים אלה גם משולש שנמצא בתוך מעגל הוא משולש חסום), וטריגונומטרי (ייתכן שתלמידים אינם יודעים שמשפט הסינוסים תקף רק עבור משולש החסום במעגל).

יחד עם זאת, אמצעי בקרה המקובל בבעיות מסוג זה מעיד בבירור על השגיאה. על-פי המשפט: "במשולש, מול הצלע הגדולה מונחת הזווית גדולה", התוצאה $\angle \alpha_1 = 34.53^\circ$ אינה אפשרית, משום שזווית זו אינה הזווית הגדולה במשולש, למרות שהיא מונחת מול הצלע הגדולה במשולש, $AC = 24$ ס"מ.

v. פתרון חמישי

"משפט" על הזווית בין הרדיוס והקוטר :

פתרון זה כולל גם את סעיף א' של הבעיה: חישוב רדיוס המעגל.

(1) משפט: הזווית בין רדיוס לקוטר המעגל היא 90° .

$$(2) \text{ סעיף א' } \Delta AOC \text{ משפט הסינוסים: } \frac{R}{\sin 60^\circ} = \frac{24}{\sin 90^\circ}$$

$$(3) R = 20.78 \text{ ס"מ}$$

(4) סעיף ב' ΔABC משפט הסינוסים:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R = 2 \cdot 20.78$$

$$BC = 41.56 \cdot \sin 60^\circ$$

$$BC = 36 \text{ ס"מ} \quad (5)$$

ניתוח השגיאות: השגיאה הראשונה מצויה בשלב (1) של הפתרון. הפתרון מסתמך על "משפט גיאומטרי" שגוי - "הזווית בין רדיוס לקוטר המעגל היא 90° ". השגיאה השנייה מצויה בשלב (4) של הפתרון. שימוש במשפט הסינוסים, המקשר בין משולש לבין קוטר המעגל החוסם אותו, למרות ש- ΔABC אינו חסום במעגל, בדומה לשגיאה שתוארה בפתרון IV.

האם שגיאה? איך נדע? תיקון שגיאה המופיעה בשלב הראשון פירושו להתחיל את הפתרון בדרך אחרת. יחד עם זאת, בקרה גיאומטרית אפשרית במצב זה, על-פי המשפט: "במשולש ישר-זווית בעל זווית חדה בת 30° , הניצב שמול זווית זו שווה למחצית היתר". כתוצאה מה"משפט" המעוות בשלב 1, משולש ΔAOC הוא משולש מסוג זה שבו היתר הוא 24 ס"מ, והניצב מול הזווית הקטנה הוא 8 ס"מ, וזה בלתי אפשרי.

מילות סיכום ותהיות

אנו מאמינות שחשוב שמורים ידעו מה קל ומה קשה לתלמידים, ובפרט, באילו נושאים התלמידים מפגינים ידע ובאילו נושאים הם מתקשים. בסיכום זה נתייחס לידע התלמידים, ולקשיים שהתגלו בפתרונותיהם השונים לבעיה זו. לסיום, נציג סיווג של מצבים שונים הנתונים במשולש, וננתח דרכי פתרון אפשריות לכל סוג.

3. קביעה שגויה כי נתונה זווית ישרה במשולש (פתרון V). סיבות אפשריות לשגיאה זו: עיוות משפטים מוכרים, כמו "זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה 90°" או "זווית בין משיק ורדיוס, בנקודת ההשקה, שווה 90°". או דמיון ויזואלי (בסרטוט המצורף) בין הזוויות הצמודות שערכן 100° ו-80° בקירוב, לבין זוויות צמודות ישרות.

בחינת דרכים לבקרה

מאמר זה עוסק בפתרון בעיות במישור בכלים טריגונומטריים. על כלי הבקרה לסייע בידי הפותר לבדוק אם מהלך הפתרון הוביל לקבוצת האמת. כלומר, הבקרה אמורה לאפשר לפותר להשיב על השאלות:

(א) האם התוצאה שקיבלתי שייכת לקבוצת האמת של הבעיה?

(ב) האם יש תוצאות נוספות (שלא מצאתי) בקבוצת האמת?

על-מנת להשיב על השאלה הראשונה, מקובל להשתמש במשפטים הגיאומטריים: "במשולש, מול הצלע הגדולה מונחת הזווית הגדולה" או "סכום זוויות במשולש שווה 180°". ראינו בפתרון II שלא תמיד ניתן להצביע על תוצאה שאינה שייכת לקבוצת האמת של הבעיה, באמצעות בקרה גיאומטרית זו. לעומת זאת, הצבה חוזרת במשפט הסינוסים או במשפט הקוסינוסים מאפשרת בקרה לאיתור תוצאות שאינן שייכות לקבוצת האמת (ניתוח פתרון III).

על-מנת להשיב על השאלה השנייה, כדאי לברר מראש, בהתבסס על נתוני הבעיה, מהו מספר התוצאות הצפוי, אם נתון משולש מוגדר היטב. בהתאם למשפטי החפיפה (ז.ז.ז. או ז.ז.צ. או צ.צ.צ.) או צ.צ.זווית מול הצלע הגדולה בין השתיים), יהיה לבעיה פתרון יחיד. בכל מצב אחר ייתכנו שני פתרונות (הכוונה למשולש שנתונים בו צ.צ.זווית שאינה מול הצלע הגדולה, או לשילוב בין נתונים במשולש לבין נתונים במעגל החוסם אותו). בבעיה שנדונה במאמר זה נתון היה משולש מוגדר היטב, ועל-כן הייתה לבעיה תוצאה יחידה.

מכיר, כי הפתרונות השונים נבעו מכך שחלק מהפותרים בחרו להתחיל את מהלך הפתרון תוך שימוש במשפט הקוסינוסים, ואילו אחרים השתמשו במשפט הסינוסים. ההחלטה אם להשתמש במשפט הסינוסים או במשפט הקוסינוסים תלויה בנתוני הבעיה.

Stanton (1993) מתייחס למצב שבו נתונות שלוש צלעות וזווית שאינה הגדולה במשולש (ז.ז.צ.צ.). במצב זה יחידות הפתרון ידועה, והמשימה היא למצוא את הזוויות הנוספות. Stanton מציע (הצעה שאינה מבוססת מחקר), להדריך את התלמידים להשתמש במשפט הסינוסים, רק כאשר מחפשים את הזווית הקטנה במשולש. לדבריו, אם מחפשים את הזווית הגדולה במשולש,

שימוש במשפט הסינוסים יכול להוביל לתשובה שגויה, מכיוון שהתלמיד עלול להיקלע למצב שבו לא ידע לבחור בין שתי התשובות שיתקבלו. במצב שבו מחפשים את הזווית הגדולה, מציע Stanton להשתמש במשפט הקוסינוסים.

ישנם מקרים שבהם נתוני הבעיה מכתיבים באיזה משפט להשתמש, וישנם מקרים שבהם קיימת בידי הפותר אפשרות בחירה בין המשפטים. בטבלה 1 (המוצגת בסוף המאמר) נראה ניסיון לרכז מקרים שונים שמשמשים בהם במשפט הסינוסים או במשפט הקוסינוסים.

נחשפנו לעושר המתמטי הרב הטמון בבעיה אחת ובפתרונותיה השונים, ונתרנו עם שאלה - מה ניתן לעשות בידע זה? יש לשער כי תלמיד או מורה שפתרו נכון בעיה זו, תוך שימוש במשפט הקוסינוסים (פתרון I), לא היו מודעים לכל ההיבטים המתמטיים הגלומים בה, אותם היבטים שעלו מניתוח השגיאות. יחד עם זאת איננו יודעים באיזו דרך כדאי להשתמש בידע המתמטי, שניתן להפיק מניתוח הפתרונות השגויים: האם בפעם הבאה שנלמד נדגיש בפני תלמידינו תובנות חדשות אלה? האם ניתן לתלמידינו לפתור בעיה מעוררת שגיאה זו? האם נבקש מהם לפתור אותה בשתי דרכים? האם נציג בפניהם את הפתרונות השגויים שראינו לעיל, או אולי רק חלק מפתרונות שגויים אלו? האם נציג בפניהם שניים שלושה או אפילו ארבעה פתרונות שונים, ונבקש מהם לזהות פתרונות נכונים ושגויים, ולנתח את השגיאות בעצמם? כיצד כדאי לנהוג, ומדוע?

במהלך השנה ניהלנו במספר כיתות דיונים מעניינים לגבי בעיה זו ופתרונותיה השגויים. תחילה, התבקשו התלמידים לפתור את הבעיה ולהתייחס לפתרונות נוספים - נכונים ושגויים, ולאחר מכן ערכנו דיון בו התייחסו לתשובות השונות. הדיונים היו ערים והשיח המתמטי היה עשיר. עם זאת, לא בחרו איזו השפעה הייתה לדיונים אלו על הידע המתמטי של הלומדים, על יכולתם לפתור בעיות אחרות בתחום, ועל יכולתם לבקר את נכונות פתרונותיהם. לשם כך דרוש מחקר מקיף. על-כל פנים, המלצה אחת נשמעה שוב ושוב בכיתות השונות: לא כדאי להשתמש במשפט הסינוסים, כלומר, אם רק אפשר - עדיף שימוש במשפט הקוסינוסים. האם כדאי לאמץ המלצה זו? תמיד? על-כך במאמר הבא.

מחזור	למציאת...	פתרון בעזרת...
צ.צ.צ.	צלע	משפט הקוסינוסים
צ.צ.צ.	צלע	משפט הסינוסים
צ.צ.צ.	זווית	משפט הקוסינוסים
צ.צ.צ. (הזווית מול הצלע הגדולה בין השתיים)	זווית	משפט הסינוסים - יש לבחור בין תוצאות המשוואה הטריגונומטרית המתקבלת.
צ.צ.צ.	זווית	משפט הקוסינוסים
צ.צ.צ.	זווית	משפט הסינוסים - יש לבחור בין תוצאות המשוואה הטריגונומטרית המתקבלת.
צ.צ.צ.	זווית	משפט הסינוסים עם הזווית שמול הצלע הקטנה
צ.צ.צ. (הזווית מול הצלע הקטנה בין השתיים)	צלע/זווית	משפט הקוסינוסים (פתרון משוואה ריבועית)
צ.צ.צ.	זווית/זווית	משפט הסינוסים

טבלה 1: מצבים שבהם משתמשים במשפט הסינוסים ובמשפט הקוסינוסים

מקורות:

חזור מפמ"ר לשנת הלימודים תשס"ו לחטיבה העליונה ס"ו/1. (2005). ירושלים: משרד החינוך התרבות והספורט.

קלונבר, נ' (1996). מושג הפונקציה בתחום הטריגונומטריה אצל תלמידי כיתות י"א ו-י"ב. השוואה בין פונקציות אלגבריות ופונקציות טריגונומטריות. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח". אוניברסיטת תל-אביב.

Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S., & Zaslavsky, O. (1986). Students' distortions of theorems, Focus on Learning Problems. *Mathematics*, 8 (1), 49-57.

Stanton, R.O. (1993). An unlawful use of the Law of Sines. *Mathematics Teacher*, 86 (2), 164-165.

פרופ' פסיה צמיר

החוג להוראת המדעים, הפקולטה לחינוך אוניברסיטת תל אביב.
תחומי מחקר: תפישת מושגים מתמטיים, בחינת דרכי הוראה והשפעתן על תפישת מושגים מתמטיים, הכשרת מורים וקידום מורים, כללים אינטואיטיביים במתמטיקה, במדעים, הקשר בין מתמטיקה ומדעים.

אביגיל (גלי) פרקש

מורה באולפנית ישרון, מגישה לבגרות בכל הרמות. בוגרת תואר ראשון במתמטיקה ותעודת הוראה באוניברסיטה העברית. בוגרת תואר שני, ולימודי תורה באוניברסיטת תל-אביב. המחקר שהוביל לכתיבת המאמרים הונחה על-ידי פרופ' פסיה צמיר.