משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

אוניברסיטת חיפה
הפקולטה לחינוך

מטה מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי
المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

חפיפת משולשים, התנאים שמספיקים והתנאים שאינם מספיקים

הצעה לאבני דרך בחקירת הנושא ולדיון בו בכיתה

מדור: אפשר גם אחרת

כתבו: דורית פטקין ואולגה פלקסין

תקציר: להוראת משפטי חפיפת המשולשים בחטיבת הביניים ניתן משקל רב. כיצד ניתן ללמד נושא זה על ידי הצגת שאלות חקר ויצירת מגוון רחב של דוגמאות? מאמר זה עונה על שאלה זו, תוך כדי התייחסות לשלוש שאלות: האם מרכיב אחד זהה בשני משולשים יכול להיות תנאי מספיק לחפיפתם? האם שני מרכיבים שווים בהתאמה מהווים תנאי מספיק? האם שלושה מרכיבים שווים בהתאמה מהווים תנאי מספיק? ולבסוף, מה עם חמישה מאפיינים שווים בהתאמה...?

מילות מפתח: תנאי מספיק, משולשים חופפים, צלע משותפת, זווית משותפת, משולשים שווי שטח, משולשים שווי היקף, "חמישווים".

החומר פורסם במסגרת: על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 37.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8240757
דוא"ל: hmathcntr@construct.haifa.ac.il אתר: http://highmath.haifa.ac.il

אפשר גם אחרת

חפיפת משולשים, התנאים המספיקים והתנאים שאינם מספיקים

הצעה לאבני דרך בחקירת הנושא ולדיון בו בכיתה

דורית פטקין אולגה פלקסין

אחת מהמטרות של למידת גיאומטריה אוקלידית בבית הספר העל-יסודי היא, פיתוח של חשיבה לוגית וטיפוח תרבות של ניסוח ונימוק טענות. במסמך הסטנדרטים של המועצה הלאומית של המורים למתמטיקה בארה"ב (NCTM , 2000) כתוב:

"Students should enter high school understanding the properties of, and relationship among, basic geometric objects. This knowledge can be extended and applied in various ways. Students should become increasingly able to use deductive reasoning to establish or refute conjectures and should be able to use established knowledge to deduce information about other situations" (pp. 310).

מטרה זו ניתנת להשגה ברמות שונות. בדרך כלל בהוראה בכיתות מסתפקים ברמה המכילה היכרות עם אוסף מוגבל של טענות, ופיתוח יכולת לפתרון בעיות חישוב ובעיות הוכחה, המסתמכות על אוסף טענות זה. במקרים אלה מנוסחות בעיות באופן ישיר, המכוון את חשיבת התלמיד לשימוש באותן טענות מסוימות. הוכחות בדרך שלילה, משפטי קיום, בעיות בנייה, פירושים שונים של המשפטים הנלמדים, לא נעשים, בדרך כלל, במסגרת הלימודים השוטפים, ובמקרים רבים פוסחים עליהם ומוציאים אותם "מחוץ" לפרקי הלימוד.

ניתן להשוות את למידת הגיאומטריה האוקלידית לסיור באתר העשיר בפריטים ובחפצים מעניינים, אך ה"מבקרים" בו לא רק שלא נחשפים לקיומם, הם אף יוצאים מהאתר כשהם משוכנעים שמסלול הסיור שבו טיילו הוא כל האתר, וכי אסור לסטות מהמסלול. וכן, כל מה שמסביב הוא "שדה מוקשים". במילים אחרות, התלמידים "מפתחים תפישה מוטעית" לגבי האתר. לדעת פטקין (פטקין, 1993,1994). יש לעצב את חשיבת הלומד באמצעות חשיפה לסוגי הוכחות שונות, המובאות בדרכים שונות, ובשימוש בטעויות ותפישות מוטעות. Hershkovitz (1987) מסווגת תפישות מוטעות (misconceptions) של מושגים בגיאומטריה פורמאלית לפי שלוש קטגוריות: תפישות מוטעות מתמשכות, תפישות מוטעות הפוחתות עם רכישת המושגים, ותפישות מוטעות הגדלות עם רכישת מושגים.

רכישת הבנה של מושג הוא תהליך הדרגתי (דוד, 2006). יש לסייע ללומד להגיע למצב שבו יוכל להבחין בין דימוי של מושג (concept Image) והגדרת מושג (concept definition) , ולדאוג לכך שאוסף הדוגמאות שצבר במשך לימודיו יורחב מעבר לאותן דוגמאות המהוות "אב טיפוס" (הרשקוביץ, 1991, 1992). שימוש נכון בכל אלה, עשוי ל"מנף" ולשפר את הידע המתמטי של אותו לומד (דוד, 2007).

לדעתנו, חשוב לגוון את דרכי ההוראה של הגיאומטריה, ולשלב בהן גם דוגמאות ושאלות הנחשבות כ**"לא קונבנציונאליות"**. מתן שאלות כאלה יעודד את התלמיד לשאול שאלות ולחקור אותן. תהליך העלאת השאלות והדיון בהן חשוב מבחינה דידקטית, ומשמש כאמצעי המאפשר ללומד להגיע באופן עצמאי להגדרת המושגים ולניסוח הטענות. במקרה כזה, משמש המורה כמכוון או מנחה הדיון ו/או החקירה, למסלולים רלוונטיים הכוללים עריכת מסקנות וסיכומן. יש לציין, כי לא תמיד הכלים העומדים לרשות הלומד מאפשרים למצוא תשובה לכל שאלה, ולעתים מאותה סיבה גם המורה מתקשה לנמק ללומד את התשובה. יחד עם זאת, הרווח משיטת הוראה בסגנון כזה גובר על השיקול לא להשתמש בה. כך מתבצעת רכישת הבנה של המושגים באופן הדרגתי, ומתפתח תהליך התואם את הגישה הקונסטרוקטיביסטית, לפיה הלומד בונה בעצמו את הידע שלו. בכך ניתן להפחית קשיים הגורמים לפיתוח טעויות והצמחת תפישות מוטעות (Hershkovitz ,1987).

במאמר זה אנו מציעות **אבני דרך לחקירה ולדיון** (Mile stones), בהוראת הנושא חפיפת משולשים. באבני דרך אלה ניתן לעשות שימוש כבר בשלבים הראשונים של למידת המושג

ניתן להשוות את למידת הגיאומטריה האוקלידית לסיור באתר העשיר בפרטים ובחפצים מעניינים, אך ה"מבקרים" בו לא רק שלא נחשפים לקיומם, הם אף יוצאים מהאתר כשהם משוכנעים שמסלול הסיור שבו טיילו הוא כל האתר, וכי אסור לסטות מהמסלול.

חפיפת משולשים. ניתן להשתמש באותן אבני דרך גם בהמשך, בלימוד ענפי מתמטיקה נוספים.

היעד של משימת החקר, המוצעת להלן, הוא השגת ארבע מטרות:
1) הבנת המושגים "תנאי הכרחי" ו"תנאי מספיק" וההבדל ביניהם.
2) הסקת המסקנה כי **שלוש** הוא המספר המינימלי של מאפיינים זהים בשני משולשים, המספיק לחפיפת המשולשים, אך **לא כל שילוב של שלושה מאפיינים זהים בשני משולשים מהווה תנאי מספיק לחפיפת המשולשים.**
3) רכישת ניסיון בבעיות בנייה .
4) הבנה אינטואיטיבית של תנאים שקולים, יצירת תנאים שקולים דרך קשרים מוכרים בין מאפייני משולש שונים, ולהיפך – הסקת מסקנות על קיום קשרים בין מאפיינים, על סמך גילוי שקילות תנאים.

המושג **"חפיפת משולשים"** נלמד בבית הספר העל-יסודי. בלמידת המושג "חפיפה" לומדים התלמידים, כי משולשים חופפים הם משולשים שניתן להניח אותם זה על זה כך שהם יתלכדו.

אם שני משולשים חופפים זה לזה, מתקיימים שישה שוויונות: שוויון שלוש הצלעות בהתאמה ושוויון שלוש הזוויות בהתאמה. אלה שישה תנאים **הכרחיים** לחפיפת שני משולשים. התנאים **המספיקים** לחפיפת משולשים, הנלמדים בבית הספר העל יסודי והמכונים משפטי חפיפה, הם שילובים שונים של שלושה תנאים מתוך ששת התנאים ההכרחיים.
במאמר זה מוצעת דרך, שבה לאחר הגדרת המושג חפיפת משולשים, וגילוי שישה שוויונות הנובעים מהחפיפה בין הצלעות המתאימות והזוויות המתאימות, ניתן להגיע למשפטי החפיפה הקלאסיים דרך משימת חקר.

המטרה של משימת החקר היא: למצוא את המספר המינימלי של מרכיבים זהים בשני משולשים המספיק לחפיפת המשולשים.

המשימה: מציאת מספר מינימלי של מרכיבים זהים בשני משולשים, המספיק לחפיפת משולשים

את משימת החקר ניתן לחלק לשלושה שלבים.

שלב א: האם מרכיב אחד זהה בשני משולשים, יכול להיות תנאי מספיק לחפיפת המשולשים?

שלב ב: האם שני מרכיבים שווים בהתאמה בשני משולשים, יכולים להיות תנאי מספיק לחפיפת המשולשים?

שלב ג: האם שלושה מרכיבים שווים בהתאמה בשני משולשים, יכולים להיות תנאי מספיק לחפיפת המשולשים?

לתשובות השליליות על השאלות בשלבים א' ו- ב' מגיעים התלמידים דרך בניית דוגמאות נגדיות, כאשר בשלב ב' עליהם "לטפל" בכל השילובים האפשריים של שני מרכיבים זהים במשולשים. השילובים האפשריים הם: **ב1**. צלע,צלע, **ב2**. זווית, זווית, **ב3**. צלע, זווית שליד הצלע, **ב4**. צלע, זווית מול הצלע .
בשלב ג' התלמידים נדרשים להגדיר תחילה את כל השילובים האפשריים של שלושה מרכיבים: **ג1**. שלוש זוויות, **ג2**. שלוש צלעות, **ג3**. שתי צלעות, זווית הכלואה בין הצלעות, **ג4**. שתי צלעות, והזווית שמול אחת מבין הצלעות, **ג5**. צלע, ושתי זוויות שלידה, **ג6**. צלע, ושתי זוויות, שאחת מהן ליד הצלע והזווית השנייה היא מול הצלע.

בשלב זה יכירו התלמידים את ארבעת משפטי החפיפה: צ.ז.צ. צ.צ.צ. ז.צ.ז, ז.ז.צ. וגם יגיעו למסקנה ש**לא כל שילוב של שלושה מרכיבים שווים בהתאמה בשני משולשים, מהווה תנאי מספיק לחפיפת המשולשים.** לאחר גילוי המשפט: שתי צלעות, וזווית מול הצלע הגדולה בין שתי הצלעות, ניתן לסכם את שלב ג' של משימת החקר.

עם ההתקדמות בלימודי הגיאומטריה ניתן להרחיב את רשימת התנאים ההכרחיים של חפיפת משולשים. לדוגמה: **במשולשים חופפים שווים בהתאמה גם כל המאפיינים הנוספים:** התיכונים, הגבהים, חוצי הזוויות, רדיוסי המעגלים החוסמים והחסומים, שטח והיקף. עובדות אלו מעלות את השאלות:

האם ניתן לנסח משפטי חפיפה נוספים, בהם התנאים המספיקים לחפיפה יכילו גם שוויון בין חלק מן המאפיינים הנוספים האלה?

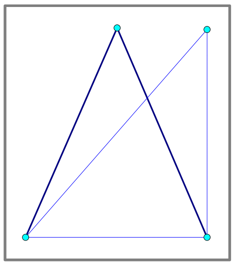
האם התשובות השליליות על השאלות בשלבי החקירה א' ו- ב' של משימת החקר, יישארו בתוקף גם כאשר מדובר על המרכיבים הזהים מתוך המאפיינים הנוספים?

להלן מובאות מספר דוגמאות, שניתן להשתמש בהן בשלבים א'-ג' של משימת החקר, אשר עוסקת בנושא התנאים המספיקים והתנאים שאינם מספיקים לחפיפת משולשים.

שלב א: קיום מרכיב אחד שווה בשני משולשים אינו מספיק לחפיפת המשולשים.

דוגמאות

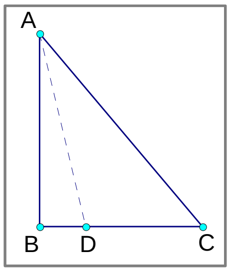
א1. שני משולשים **בעלי צלע אחת משותפת** שאינם חופפים (ראה סרטוט 1)



סרטוט 1

אחד המשולשים הוא חד-זוויות ושווה-שוקיים והשני הוא משולש ישר-זווית, שאחד הניצבים שלו מתלכד עם הבסיס של המשולש השווה-שוקיים.

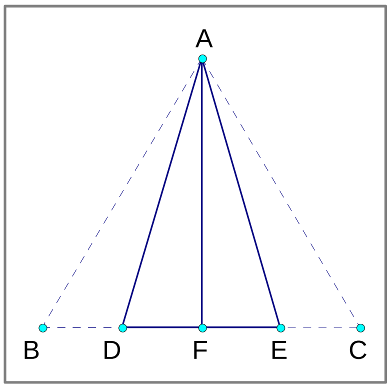
2א. שני משולשים **עם זווית אחת משותפת** שאינם חופפים (ראה סרטוט 2).



סרטוט 2

המשולשים ΔABC ו- ΔABD הם שני משולשים ישרי-זווית (כלומר, זווית ישרה משותפת) שאינם חופפים.

3א. שני משולשים **עם גובה (תיכון, חוצה-זווית) משותף** שאינם חופפים (ראה סרטוט 3).

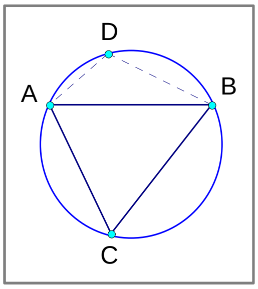


סרטוט 3

ΔABC ו- ΔADE משולשים שווי- שוקיים. הנקודה F היא אמצע הקטעים DE ו- BC (הנקודות C,E,D,B נמצאות על ישר אחד). הקטע AF מאונך ל- BC.

לכן AF הוא גובה (תיכון וחוצה-זווית) בכל אחד מהמשולשים שווי-השוקיים ΔABC ו- ΔADE שאינם חופפים.

4א. שני משולשים **החסומים באותו מעגל** שאינם חופפים (ראה סרטוט 4).

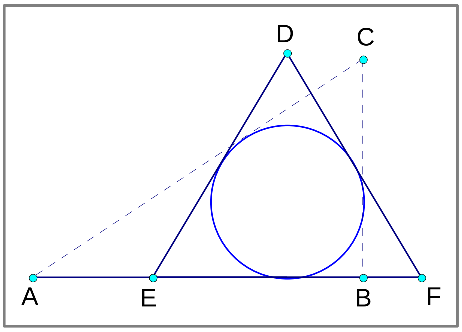


סרטוט 4

AB הוא מיתר במעגל שאינו קוטר. הנקודות D ו- C נמצאות על המעגל בצדדים שונים של המיתר AB. משולשים ΔABC ו- ΔABD חסומים באותו מעגל אך אינם חופפים.

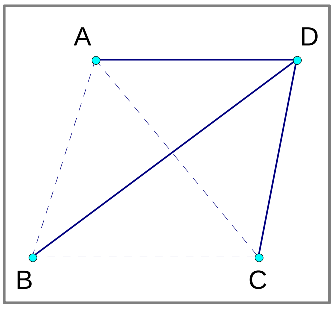
5א. שני משולשים **החוסמים את אותו מעגל**, שאינם חופפים (ראה סרטוט 5).

ΔABC הוא משולש ישר- זווית ו- ΔEDF הוא משולש שווה-צלעות, שניהם חוסמים את אותו המעגל, אך אינם חופפים.



סרטוט 5

6א. שני משולשים **שווי שטח** שאינם חופפים (ראה סרטוט 6).



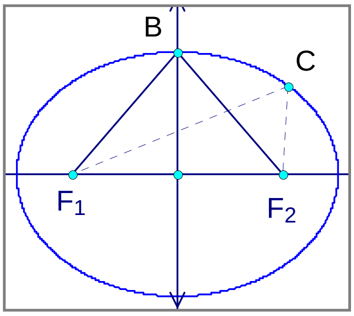
סרטוט 6

$AD \parallel BC$. המשולשים ΔABC ו- ΔBDC הם משולשים שווי שטח, ואינם חופפים זה לזה (אחד מהם חד-זווית והשני קהה-זווית).

7א. שני משולשים **שווי היקף** שאינם חופפים (ראה סרטוט 7).

הנקודות F_1 ו- F_2 הן מוקדי אליפסה, הנקודה B היא אחד מקדקודי האליפסה (קצה הציר הקטן), הנקודה C נמצאת על האליפסה. המשולשים ΔF_1F_2C ו- ΔF_1F_2B הם שווי היקף

ואינם חופפים (כי אחד מהם הוא משולש שווה-שוקיים והשני אינו משולש שווה שוקיים).



סרטוט 7

שלב ב: קיום שני מרכיבים שווים בהתאמה בשני משולשים אינו מספיק לחפיפת משולשים.

דוגמאות

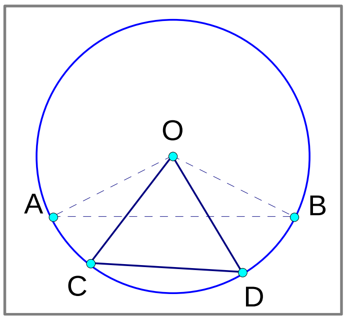
1ב. דוגמה 6א היא גם דוגמה לשני משולשים בעלי **צלע משותפת ושווי שטח**, שאינם חופפים.

2ב. דוגמה 7א היא גם דוגמה לשני משולשים בעלי **צלע משותפת ושווי היקף**, שאינם חופפים.

3ב. דוגמה 4א היא גם דוגמה לשני משולשים בעלי **צלע משותפת וחסומים באותו מעגל**, שאינם חופפים.

האם שני משולשים שווי היקף ושווי שטח חופפים זה לזה?

4ב. שני משולשים השווים בהתאמה ב**שתי צלעות**, שאינם חופפים (ראה סרטוט 8).



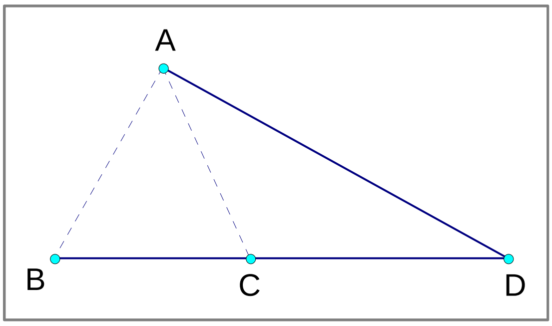
סרטוט 8

הנקודות A,B,C,D נמצאות על המעגל O, כך שהנקודות C ו- D נמצאות על הקשת AB, שמידתה קטנה מ- $180°$.

$OA=OB=OC=OD$, כולם רדיוסים. כך, שתי צלעות של המשולש ΔAOB שוות בהתאמה לשתי צלעות של המשולש ΔCOD, כאשר המשולשים אינם חופפים.

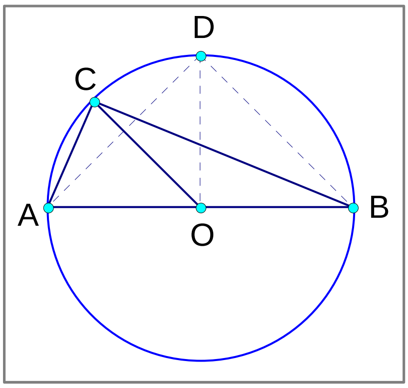
5ב. שני משולשים השווים בהתאמה ב**צלע וזווית לידה** , שאינם חופפים (ראה סרטוט 9).

למשולשים ΔABC ו- ΔABD צלע משותפת AB, וזווית ליד הצלע ($\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC$), אך המשולשים אינם חופפים .



סרטוט 9

6ב. שני משולשים השווים בהתאמה ב**צלע וזווית מולה**, או **צלע ורדיוס המעגל החוסם**, או **זווית ורדיוס המעגל החוסם**, או **צלע ותיכון אל הצלע** - שאינם חופפים (ראה סרטוט 10).



סרטוט 10

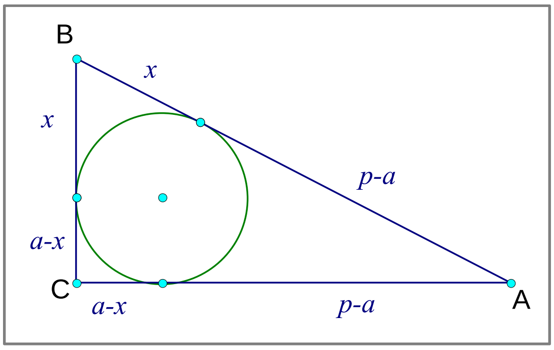
הנקודות A, B, C, D נמצאות על המעגל O, AB - קוטר המעגל, DO מאונך ל- AB.

במסגרת מאמר זה לא נתייחס לכל השילובים של שני מרכיבים השווים בהתאמה בשני משולשים שאינם חופפים. אנו משאירים לקוראים לבנות את הדוגמאות הנוספות. חשוב לציין, כי בבניית הדוגמאות צריך להקפיד על מהלך שאינו משאיר ספק בקיום הצורות הבנויות, ובכך שהמשולשים בהם קיימים המרכיבים השווים בהתאמה אינם חופפים.

ברצוננו להציג רק עוד דוגמה אחת השייכת לשלב ב', שלדעתנו, היא פחות שכיחה או פחות טריוויאלית מהדוגמאות האחרות.

7ב. שני משולשים **שווי היקף ושווי שטח**, שאינם חופפים.

נניח כי נתון משולש בעל שטח S והיקף $2p$ (ראה סרטוט 11).



סרטוט 11

$a+b+c=2p$. אם r הוא רדיוס המעגל החסום במשולש, מהנוסחה $S=pr$ נובע כי r, רדיוס המעגל החסום במשולש, מוגדר חד-משמעית. לכן, מציאת שני משולשים שווי היקף ושווי שטח שאינם חופפים, שקולה לבניית שני משולשים שווי שטח החוסמים אותו המעגל והם אינם חופפים.

נניח כי משולש ABC בעל שטח S חוסם מעגל בעל רדיוס r, כאשר צלעות המשולש הן: $AB=c, BC=a, AC=b$.

ולכן אם נחלק את הצלע BC לשני קטעים, שאחד מהם הוא x, והשני הוא $a-x$ (כמו בסרטוט 11) נקבל, שהצלע AC מחולקת לקטעים $a-x$ ו- $b-a+x=p-a$ והצלע AB מחולקת לקטעים: x ו- $p-a$.

נשתמש בנוסחת הרון:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Downarrow$$

$$p^2\cdot r^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Downarrow$$

$$Sr=(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\Downarrow$$

$$Sr=(p-a)\cdot x\cdot(a-x)$$

$$\Downarrow$$

$$x^2-ax+\frac{Sr}{p-a}=0$$

אם למשוואה זאת שני פתרונות, הם בהכרח חיוביים, כי $a>0$ וגם $\frac{Sr}{p-a}>0$.

לכן , כדי שיהיה קיים משולש על- פי S, r ו- p, מספיק שהפרמטר a יקיים את התנאי: $a^2-\frac{4Sr}{p-a}>0$

לדוגמה, נניח כי נתון: $S=6$ יחידות שטח, $p=6$ יחידות אורך, $r=1$ יחידות אורך.

נמצא שני משולשים, אשר מקיימים את שני התנאים: שטחם 6 יחידות שטח והיקפם 12 יחידות אורך, אך אינם חופפים:

1. משולש ישר-זווית שצלעותיו $a_1=3, b_1=4, c_1=5$ הוא משולש שמקיים את התנאים הנתונים.
2. נניח כי במשולש אחר, המקיים את התנאים הנתונים, אחת הצלעות היא $a_2=3.5$. מציבים את הערכים במשוואה הריבועית ומקבלים:

$$x^2-3.5x+2.4=0$$

פתרונות המשוואה הם:

$$x_{1,2}=\frac{3.5\pm\sqrt{2.65}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$b_2=p-x_1=6-\frac{3.5+\sqrt{2.65}}{2}\approx 3.44$$

$$c_2=p-a+x_1=2.5+\frac{3.5+\sqrt{2.65}}{2}\approx 5.064$$

שלב ג. קיום שלושה מרכיבים השווים בהתאמה בשני משולשים, לא תמיד מהווה תנאי מספיק לחפיפת משולשים.

דוגמאות

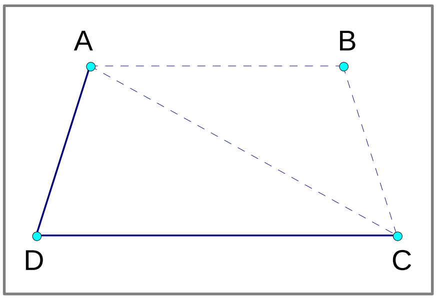
ג1. אם שלוש זוויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשלוש זוויות במשולש השני, המשולשים לא בהכרח חופפים.

ג2. צ.צ.ז (מול הצלע הקטנה) (ראה סרטוט 12.)

$ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקיים (AB מקביל ל- DC, $BC=AD$).

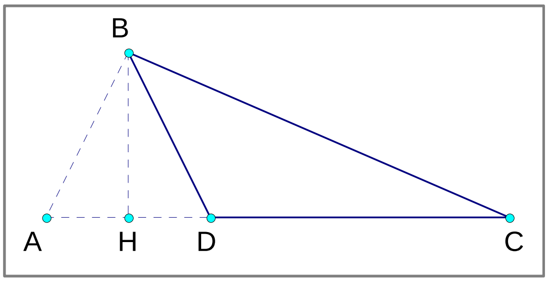
במשולשים ΔABC ו- ΔCDA **שתי צלעות** שוות בהתאמה ($AC=CA$, $BC=DA$), **והזוויות** שמול אחת הצלעות גם הן שוות ($\measuredangle BAC=\measuredangle DCA$), אך המשולשים אינם חופפים.

משפט חפיפה נוסף: צלע, תיכון, צלע



סרטוט 12

ג3. אם **שתי צלעות** במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי צלעות במשולש השני, ו**הגבהים לצלע השלישית** גם הם שווים בשני המשולשים, המשולשים אינם בהכרח חופפים. (ראה סרטוט 13.)



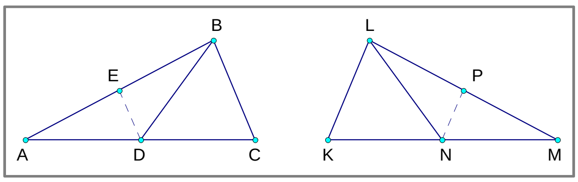
סרטוט 13

המשולש ΔBDC הוא משולש קהה-זווית ($\sphericalangle BDC > 90^\circ$), BH – גובה לצלע DC, $HD=AH$ (הנקודה A על המשך CH), ולכן $BD=AB$. כלומר, למשולשים ΔABC ו- ΔBDC (שאינם חופפים) שתי צלעות שוות בהתאמה ($BD=AB$, $BC=BC$), והגובה לצלע השלישית BH משותף לשני המשולשים.

במסגרת הרחבת המשימה בשלב ג', ניתן גם למצוא שילובים של שלושה מאפיינים השווים בהתאמה בשני המשולשים, המהווים תנאי מספיק לחפיפת המשולשים, שאינם מוכרים כמשפטי חפיפה מקובלים.

לדוגמה, ניתן לנסח ולהוכיח משפטי חפיפה נוספים כמו: "צלע,תיכון,צלע" ו- "תיכון,צלע,תיכון".

משפט (צלע,תיכון, צלע): אם שתי צלעות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי צלעות במשולש השני, והתיכונים לצלע השלישית אף הם שווים בשני המשולשים, שני המשולשים הם חופפים (ראה סרטוט 14).



סרטוט 14

נתון: משולשים ΔABC ו- ΔMLK. BD תיכון לצלע AC במשולש ΔABC, LN תיכון לצלע MK במשולש ΔMLK.

$LM=AB$, $LK=BC$, $LN=BD$.

צ"ל: $\Delta ABC \cong \Delta MLK$.

הוכחה: בניות עזר: 1. במשולש ΔABC מעבירים דרך הנקודה D ישר המקביל לצלע BC. E היא נקודת החיתוך של הישר עם הצלע AB

2. מעבירים במשולש ΔKLM דרך הנקודה N ישר המקביל לצלע KL. הישר חותך את הצלע LM בנקודה P.

על-פי המשפט ההפוך למשפט קטע אמצעים במשולש, הקטע היוצא מאמצע צלע במשולש, והמקביל לצלע אחרת באותו משולש הוא קטע אמצעים, מגיעים למסקנה כי ED הוא קטע אמצעים במשולש ΔABC, וכי - NP הוא קטע אמצעים במשולש ΔKLM. מכאן נובע כי:

$$DE=\frac{1}{2}BC\,,\ NP=\frac{1}{2}KL$$

על-פי הנתונים $KL=BC$, לכן $NP=DE$. מכאן נובע כי $\Delta DBE \cong \Delta NLP$ לפי המשפט צ.צ.צ.

מן החפיפה נובע כי: $\sphericalangle EBD = \sphericalangle PLN$ כזוויות מתאימות במשולשים חופפים.

לכן $\Delta ABD \cong \Delta MLN$ לפי המשפט צ.ז.צ. ומכאן נובע כי $MN=AD$ כצלעות מתאימות במשולשים חופפים. אך:

$$AD=\frac{1}{2}AC\,,\ NM=\frac{1}{2}KM$$

לכן $MK=AC$, וניתן לקבוע את חפיפת המשולשים ΔABC ו- ΔMLK על-פי המשפט צ.צ.צ., מש"ל.

(בהוכחת המשפט צלע, תיכון, צלע, הסתמכנו על המשפטים של קטע אמצעים במשולש, ועל משפטי החפיפה הסטנדרטיים.)
בעזרת המשפט הנ"ל שהוכחנו, והמשפט על נקודת מפגש תיכונים במשולש, ניתן להוכיח משפט חפיפה נוסף (תיכון,תיכון,תיכון): **אם שלושת התיכונים במשולש אחד שווים בהתאמה לשלושת התיכונים במשולש שני, המשולשים חופפים.** (כיצד נוכיח?)

וכמעט לפני סיום...

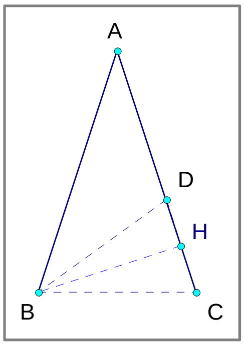
לאחר קביעת העובדה ששלושה מאפיינים השווים בהתאמה בשני משולשים, לא תמיד מהווים תנאי מספיק לחפיפת המשולשים, ניתן לדון במקרים בהם קיימים בשני משולשים שאינם חופפים, יותר משלושה מרכיבים השווים בהתאמה.

מקרה I. קיום ארבעה מאפיינים השווים בהתאמה בשני משולשים לא תמיד מהווה תנאי מספיק לחפיפת המשולשים.

דוגמה: בדוגמה ג3, במשולשים ΔABC ו- ΔBDC שווים בהתאמה **שתי צלעות** ($BD=AB$, $BC=BC$), **הגובה לצלע**

השלישית (BH) ו**זווית** שמול הצלע הקטנה בין שתי הצלעות ($\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA$) (ראה סרטוט 13 לדוגמה 3ג).

מקרה II. לסיום נביא דוגמה של שני משולשים שאינם חופפים, ויש להם חמישה מאפיינים זהים (ראה סרטוט 15).



סרטוט 15

המשולש ΔABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AC=AB$).

. $\sphericalangle BAC = 36°$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 72°$

BD חוצה הזווית $\sphericalangle ABC$, BH גובה לצלע AC.

לכן במשולש ΔBDC :

$\sphericalangle DBC = 36°$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCD = 72°$

לשני המשולשים: ΔABC ו- ΔBDC , **צלע** משותפת ($BC=BC$),

שלוש זוויות השוות אחת לאחת:

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BDC$

ו**גובה** לאחת הצלעות שווה בשני המשולשים. משולשים חמישווים הם משולשים שיש להם חמישה מאפיינים זהים, אך אינם חופפים!

דוגמה נוספת למשולשים "חמישווים" מופיעה אצל Pawley (1967) ואצל Burke (1990).

סיכום

במאמר זה מוצגת דוגמה של פעילות חקר בנושא "חפיפת משולשים". פעילות זו מסייעת להשגת הבנות הקשורות לנושא עצמו וגם להשגת מטרות-על, כמו: פיתוח חשיבה מתמטית תוך שימוש במשימת חקר מתמשכת, המשלבת תכנים מתמטיים שונים. הדוגמאות מהוות נדבך נוסף, המחדד אצל הלומד את ההבחנה בין דימוי של מושג החפיפה להגדרת מושג החפיפה עצמו, וכן תורם להבחנה בין תנאי מספיק ותנאי הכרחי. ההתנסות במשימות חקר מעין אלה מעודדת את פיתוח ההבנה האינטואיטיבית של תנאים שקולים ותנאים שאינם שקולים, כל זאת במטרה כוללת אחת- העמקת ההבנה והידע של הלומד.

מקורות

דוד, ח' (2006). צ.צ.ז. (מול הקטנה בין השתיים) הזדמנות לקישוריות. *על"ה 36*, 15-21 .

דוד, ח' (2007). שימוש בשגיאות של תלמידים כמנוף לשיפור הלמידה ולהעמקת הידע המתמטי. *על"ה 36*, 83-91.

הרשקוביץ, ר' (1991). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גיאומטריה, חלק א'. *על"ה 10*, 28-34.

הרשקוביץ, ר' (1992). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גיאומטריה, חלק ב'. *על"ה 11*, 20-27.

פטקין, ד' (1994). דרכים להתמודדות עם טעויות נפוצות בלימוד גיאומטריה. *החינוך וסביבו ט"ז*, 113-122.

פטקין, ד' (1996). דרכים שונות להקניית מושגים חדשים בגיאומטריה. *החינוך וסביבו י"ח*, 79-189.

Burke, M. (1990). 5-con triangles. *NCTM Student Math Notes, January*, 107-112 .

Hershkovitz, r. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic geometry – or when "a little learning is dangerous thing". In: J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar Misconceptions and educational strategies in science and mathematics. Vol III*, 238-251., Ithaca, NY: Cornell University.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (2000). *Principales and standards for school mathematic.* Reston, VA: NCTM.

Pawley, R. (1967). 5-con triangles. *Mathematics Teacher 60*, 438-442.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight.* Orlando, FL: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching Children Mathematics*, 5(6), 310-316.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer

ד"ר דורית פטקין

מרצה בכירה וראש החוג למתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים.

ד"ר אולגה פלקסין

מרצה במכללת סמינר הקיבוצים, ומורה למתמטיקה בבי"ס התיכון ע"ש גלילי בכפר סבא.