



מטה מל"מ  
המרכז הישראלי לחינוך מדעי  
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט



אוניברסיטת חיפה  
הפקולטה לחינוך



משרד החינוך  
המזכירות הפדגוגית  
האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים

## מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلتين الاعدادية والثانوية

# שלוש תוכנות מתמטיות, כלי עבודה למורה ולתלמיד

**מדור:** אפשר גם אחרת

**כתבה:** שרה גרז'וטיס

**תקציר:** המאמר מציג שלוש תוכנות מתמטיות, שימושיות, ידידותיות וניתנות בחינם. תוכנות אלו משמשות ככלי עזר בעבודת המורה. הן מתאימות לכתיבת דפי עבודה, מבחנים ומצגות מתמטיות, מספקות סביבת למידה עשירה רבת ייצוג, המאפשרת הבנת מושגים ועבודה עצמית. במאמר מוצגות דוגמאות שונות מספרי הלימוד.

**מילות מפתח:** כלי עזר, עריכה, סביבת למידה עשירה, חקירת פונקציות.

**החומר פורסם במסגרת:** על"ה 39, תשס"ח 2008, עמוד 52.

**החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה:** 3 עמודים.

מרכז מורים ארצי במקצוע: מתמטיקה. הפרויקט מבוצע ע"י אוניברסיטת חיפה עפ"י מכרז מס' 6/1.07  
הפרויקט מבוצע עבור האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך

מרכז ארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי -- הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905  
טל' 04-8288351 פקס. 04 - 8240757

אתר: <http://highmath.haifa.ac.il>

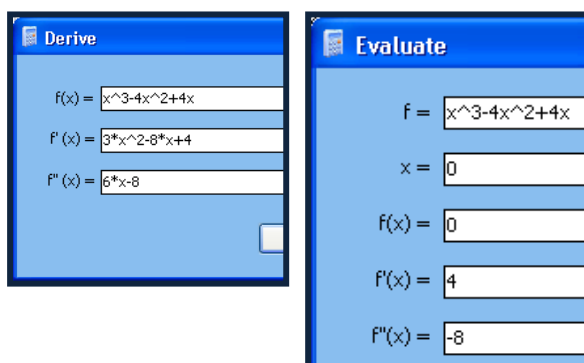
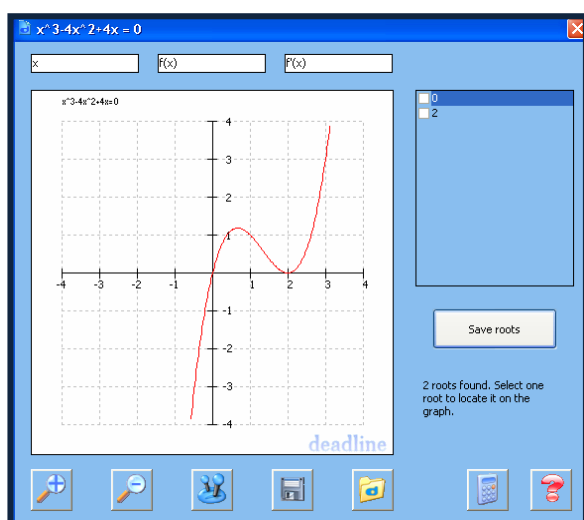
דוא"ל: [hmathctr@construct.haifa.ac.il](mailto:hmathctr@construct.haifa.ac.il)

# שלוש תוכנות מתמטיות, כלי עבודה למורה ולתלמיד

שרה גרז'וטיס

## דוגמה

נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ . מצאו את נקודות האפס של הפונקציה, נקודות הקיצון, וקבעו האם בנקודות אלה הפונקציה עולה או יורדת, קמורה או קעורה? הסבירו.



איור 1

## האפשרויות בתוכנה הן:

**Evaluate**: הצבת מספר בפונקציה.

**Derive**: חישוב נגזרת.

**Integrate**: חישוב שטח בין גרף הפונקציה וציר x בין שני ערכי x שנבחרו.

**Find roots**: מציאת נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

היום, בעידן האינטרנט, עומדים לשירותנו כלי תוכנה מתמטיים רבי עוצמה, המיושמים בעיקר בשני רבדים. חובד אחד, ככלי עבודה למורה ולתלמיד: כלי עזר לעריכת סרטונים, גרפים וחישובים מורכבים. הכלים מאפשרים כתיבת דפי עבודה ומבחנים, או הכנת מערכי שיעור בצורה נוחה ויעילה. חובד שני, ככלי להוראה ולמידה. התוכנות המתמטיות מעניקות סביבת למידה עשירה, רבת ייצוג, המאפשרת הבנת מושגים ועבודה עצמית.

במאמר זה אציג שלוש תוכנות מתמטיות שימושיות, ידידותיות, הניתנות בחינם, שהפכו להיות לי לכלים יום-יומיים בעבודתי כמורה וכמנהלת האתר g-math. התוכנות משמשות אותי לעריכת אסטטיות של מסמכים ומצגות מתמטיות, ולחקירה ופתרון בעיות מתמטיות מתחומים שונים.

לכל אחת משלוש התוכנות שבחרתי להציג תכונות ייחודיות משלה. אדגים את העבודה עמן בעזרת מספר מצומצם של בעיות, שכן היריעה בתחום זה רחבה. מאמר זה מתמקד בהצגת התוכנות בלבד.

## שם התוכנה: DeadLine (2.36)

אתר התוכנה: <http://deadline.3x.ro>

התוכנה הראשונה היא תוכנה בעלת יכולות חישוביות גבוהות בתחום החד"א. התוכנה משלבת סרטוט גרפים עם פתרון נומרי של משוואות אלגבריות, טריגונומטריות ומעריכיות, כמו גם משוואות פרמטריות שונות. התוכנה מציגה את פונקציית הנגזרת הראשונה והשנייה של פונקציה נתונה, ומחשבת את ערכיהן בנקודה מסוימת. כמו כן התוכנה מחשבת את ערך האינטגרל המסוים בתחום שנקבע, ומקשרת לתוכנה נוספת, האינטגרטור, שאף היא ניתנת בחינם: <http://integrals.wolfram.com>. תוכנה זו מחשבת את האינטגרל של כל פונקציה שתבחרו.

בנוסף לאפשרויות השמירה, בחירה ב- Graph מציגה אפשרות הנחת הסרטוט בלוח היזכרון.

## שם התוכנה: Graph (4.3)

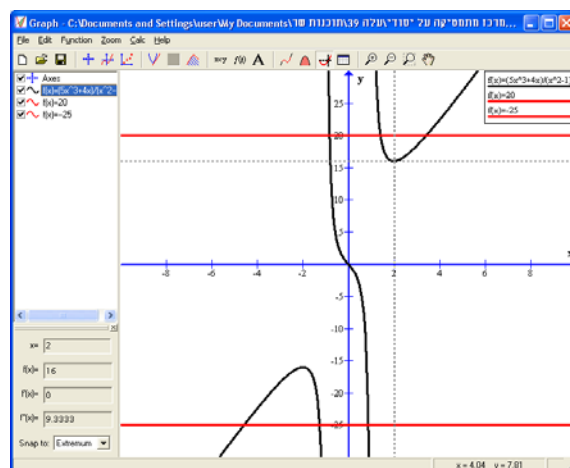
אתר התוכנה: <http://www.padowan.dk/graph>

תוכנה מתמטית זו מאפשרת, בקלות רבה, עריכה מקצועית ואסתטית, וחקירה של מגוון גרפים של פונקציות במערכת צירים. ניתן לעצב את הצירים ואת צבע הגרפים ועובייה. התוכנה מאפשרת למצוא נקודות חיתוך עם הצירים ועם פונקציות אחרות, למצוא נקודות קיצון, להעביר משיקים, ולהציל שטח בין פונקציות למציאת האינטגרל. התוכנה מאפשרת גם לעקוב אחר ערכי הפונקציה, אחר נקודות חיתוך בין פונקציות, או אחר נקודות הקיצון של הפונקציות (בהתאם להגדרה שמעדיפים ב- snap to). תוך כדי מהלך זה מקבלים גם את ערכי הנגזרת והנגזרת השנייה של הפונקציה.

## דוגמאות

(1) עבור אילו ערכים של  $k$  יחתוך הישר  $y = k$ , את הפונקציה:

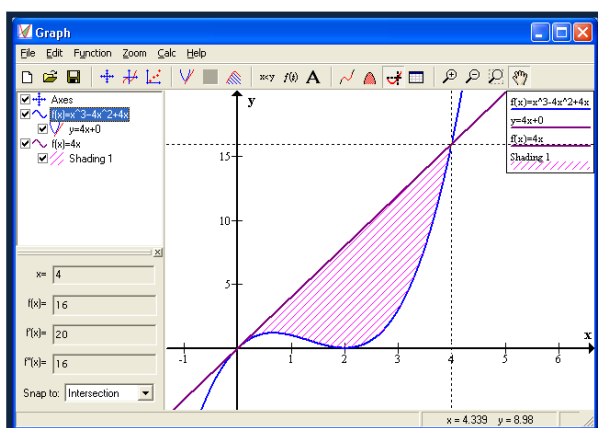
$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$$



איור 2

הכלי מאפשר לסרטט את הגרף ולמצוא את ערכי נקודות הקיצון של הפונקציה שהן:  $(-2, -16)$ ;  $(2, 16)$  מכאן שגרף הפונקציה יחתוך את הישר  $y = k$  בשלוש נקודות, כאשר  $k > 16$  או  $k < -16$ . בסרטוט רואים את סימון נקודת הקיצון על הגרף וערכיה (בקווים מקוקווים). ניתן לעקוב אחר ערכים של נקודות שונות שעל הפונקציה על-ידי גרירה של הנקודה (snap to Function / Extremum). כן מוצגים בסרטוט שני ישרים לדוגמה, החותכים את הפונקציה בשלוש נקודות.

(2) מצא את השטח המוגבל על-ידי הפונקציה  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$  והמשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 0$ .



איור 3

התוכנה מאפשרת לסרטט את הגרף ומשיק לה בנקודה שקבענו, ומחשבת את משוואתו. נגדיר את המשיק כפונקציה, דבר שיאפשר לנו למצוא את נקודות החיתוך בין הפונקציה למשיק (snap to Intersection). אז נוכל להורות לתוכנה לסמן את השטח בין הפונקציות ולחשבו בתחום שהגדרנו.

**הערה:** ניתן לראות סרטון הדרכה בכתובת: <http://www.g-math.co.il/kvachim/grapher/integral-between-2-functions.htm>

## שם התוכנה: Geogebra

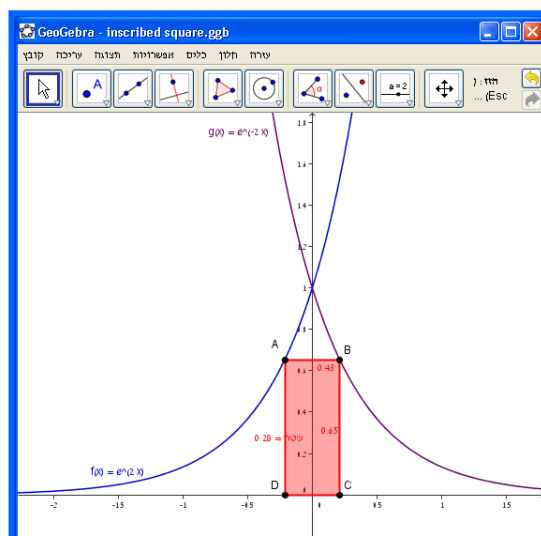
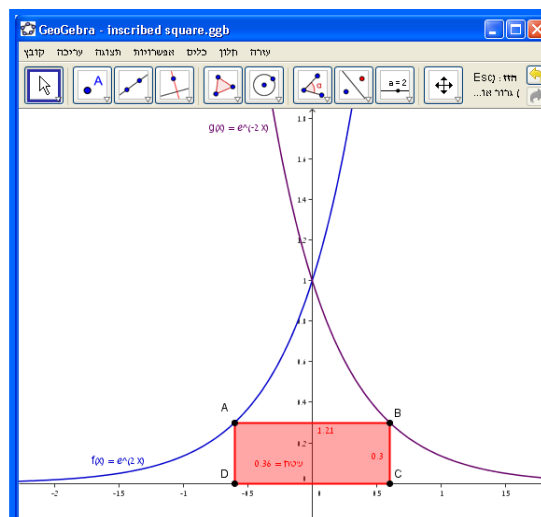
אתר התוכנה: <http://www.geogebra.org/cms>

זוהי תוכנה מתמטית דינאמית, שנועדה להוראה בתיכון, המשלבת גיאומטריה, אלגברה וחיד"א גם יחד. ניתן לבנות בעזרתה עצמים מתמטיים שונים: מנקודות, וקטורים, קטעים וקווים, חתכי חרוט, פונקציות, ולאחר מכן לפעול על עצמים אלו בייצוגים השונים. כמו כן, גאוגברה מסוגלת לפעול עם משתנים, למצוא משיקים, נגזרות ואינטגרלים של פונקציות.

גאוגברה נוחה במיוחד למורים ולתלמידים הישראלים משום שהממשק בה ניתן בעברית. את התוכנה מלווה אתר עשיר ובו ויקיפדיה של הצעות דידקטיות לפעילויות עם התוכנה בתחומים שונים, ופורום פעיל של שאלות ותשובות. אני מרבה להיעזר בפורום המשתמשים של Geogebra ונענית באדיבות ובמהירות.

## דוגמה

בסרטוט שלפניך מתוארות סקיצות של הפונקציות:  $y = e^{2x}$  ו-  $y = e^{-2x}$ . בין הגרפים של שתי הפונקציות ובין ציר  $x$  חסמו מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן בעל השטח המקסימלי.



איור 4

בסרטוט ניתן להבחין בגרפים של הפונקציות הנתונות בשאלה והמלבן הכלוא ביניהם. כמו כן ניתן לראות את אורכו, רוחבו ושטחו של המלבן. התוכנה הדינאמית מאפשרת את גרירת הנקודה A ומעקב אחר השתנות שטח המלבן. התלמידים יכולים לחקור את השפעת הזזת הנקודה A על שטח המלבן.

הכלים בתוכנת GeoGebra באמצעותם בוצע הסרטוט: כתיבת הפונקציות באזור הקלט, השמת הנקודה A על הפונקציה, העברת אנכים מ-A לצירים, כפתור המקבע נקודת חיתוך בין שני קווים, סרטוט מלבן לפי הנקודות שהתקבלו. התוכנה מאפשרת העלמת קווי עזר. נשים לב, שהנקודה A נבחרה ראשונה על גרף הפונקציה, וכל שאר הנקודות נקבעו לפי תנאי השאלה על פיה. אי לכך נוכל להזיז (על-די גרירה) את הנקודה, ולצפות במלבנים שונים הכלואים בפונקציה ובמידותיהם.

בכתובת:

[http://www.geogebra.org/cms/index.php?option=com\\_content&ask=blogcategory&id=75&Itemid=61](http://www.geogebra.org/cms/index.php?option=com_content&ask=blogcategory&id=75&Itemid=61) נמצאת הפנייה למדריכים בסרטוט וקול.

במאמר הצגתי מקצת ממגוון עצום של פעילויות הניתנות לביצוע באמצעות שלושת התוכנות. "משחק" בתוכנות יאפשר את העמקת ההיכרות עמן ועם שלל האפשרויות שהן מציעות. שלושת התוכנות מציעות תפריט עזרה המכיל הסברים בהירים לתוכנות, וכן הן מלוות בפורומים של הנחיות, טיפים ושאלות ותשובות.

## שרה גר'וטיס

מורה למתמטיקה בתיכון אמ"ת בר-אילן גוש דן, גבעת שמואל. זכתה בפרס רקנאטי ובפרס אביטל, על פיתוח יזמה בתחום מערכת תומכת להוראת מתמטיקה. [www.g-math.co.il](http://www.g-math.co.il)

## מהצגים בע"ה 40

הגליון הבא של על"ה יתפרסם ככתב עת אינטרנטי באתר של המרכז הארצי למורים למתמטיקה בחינוך העל יסודי.

המשיכו לכתוב גם לעיליון הבא של על"ה כדאי ומומלץ להוסיף מולטימדיה וקישורים.