

## הנושא: **תכונות מיוחדות של המספר 30**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר על המספר 30. זהו המספר הגדול ביותר שכל המספרים הקטנים ממנו זורים לו הם ראשוניים. מתכונה זאת נובעות תכונות נוספות לגבי שאריות החילוק של מספרים ב-30.

מילות מפתח: תורת המספרים, מספר ראשוני, חשבון, חילוק, מספרים זרים, מחלקים, שארית.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 40, ניסן תשל"ה.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

## תכונות מיוחדות של המספר 30

שני מספרים טבעיים נקראים **זרים** אם אין להם מחלק משותף גדול מ-1. למשל המספרים 21 ו-25 זרים זה לזה, כי המחלקים של 21 הם 3, 7, ו-21 והמחלקים של 25 הם 5 ו-25 ולכן, אין להם אף מחלק משותף, פרט ל-1. כמו כן, 14 ו-15 הם מספרים זרים, וכן 100 ו-121 הם זרים.

נשים לב, שלרוב המספרים הטבעיים ישנם מספרים אחרים קטנים מהם, שהם זרים להם, אבל **אינם** ראשוניים. נקח למשל את המספר 15. המספרים הקטנים ממנו וזרים לו הם 2, 7, 11, 13, 14. כל המספרים האלה **פרט ל-14** הם ראשוניים, אבל 14 זר ל-15, אף כי איננו ראשוני.

דוגמה שניה: נקח את המספר 36. המספרים הקטנים ממנו וזרים לו הם 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31 ו-35. מבין המספרים האלה המספר 25, אף כי הוא זר ל-36, איננו ראשוני, כי הוא מתחלק ב-5.

נמנה עתה את המספרים הקטנים מ-30 וזרים ל-30. מספרים אלה הם: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. כל המספרים האלה הם ראשוניים! אפשר גם להוכיח, כי 30 הוא המספר **הגדול ביותר** בעל תכונה זאת, **שכל המספרים הקטנים ממנו וזרים לו הם ראשוניים**.

נוכל לבטא תכונה זאת של 30 גם בדרך השלילה. כל מספר טבעי הקטן מ-30 ואינו ראשוני **איננו זר ל-30**. כלומר, לו ול-30 יש מחלק משותף גדול מ-1.

מתכונה זאת של המספר 30 אפשר להסיק מסקנה מעניינת: אם נחלק ב-30 מספר ראשוני כלשהו, גדול מ-30, הרי השארית שתתקבל תהיה גם היא ראשונית!

ואומנם, נניח שהמספר הראשוני הוא  $p$  ובחילוקו ב-30 מקבלים מנה  $q$  ושארית (קטנה מ-30)  $r$ , כלומר,  $p = 30q + r$ . נניח לרגע ש- $r$  איננו ראשוני, והוא קטן מ-30, הרי לפי מה שאמרנו, יש מספר  $d$  גדול מ-1 וקטן מ-30 המחלק גם את  $r$  וגם את 30. מן המשוואה  $p = 30q + r$  נובע מייד כי מספר  $d$  זה, המחלק את  $r$  ואת 30, מחלק גם את  $p$ . כלומר  $p$  איננו ראשוני! סתירה! לפיכך לא יתכן ש- $r$  לא יהיה ראשוני.

אפשר להשתמש בתוצאה זאת, כדי לבדוק אם מספר טבעי נתון,  $N$ , איננו ראשוני. נחלק אותו ב-30 אם השארית המתקבלת איננה ראשונית גם  $N$  איננו ראשוני. בדקו בדרך זאת את המספרים 187, 713 ו-12867.

האם מזה ינבע שכאשר השארית  $r$  כן ראשונית, הרי  $N$  מוכרח להיות ראשוני?