הנושא: **מספרי מֶרְסֶן ומספרי פֶּרְמָה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר על מספרי מרסן: מספרים מן הצורה 2^n-1 שבהם n ראשוני, ועל המתמטיקאי פרמה אשר עסק בחקירת מספרים מהסוג 2^n+1.

מילות מפתח: היסטוריה של המתמטיקה, יוון, אוילר, מרסן, פרמה, גאוס, תורת המספרים, מספר ראשוני, מספר משוכלל, התחלקות, חשבון, מחלק, חזקה.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 40, ניסן תשל"ה.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

מספרי מֶרְסֶן ומספרי פֶּרְמָה

היוונים הקדמונים, אשר עסקו בתכונות של מספרים שלמים, גילו כי כל מספר מן הצורה $2^{n-1}(2^n-1)$
ואשר בו 2^n-1 הוא מספר ראשוני, הוא מספר משוכלל. מספר משוכלל הוא מספר אשר סכום מחלקיו, כולל 1, אבל בלי המספר עצמו, שווה למספר. למשל $6 = 2 \times 3 = 2^{2-1} \cdot (2^2 - 1)$ הוא מספר משוכלל. כמו כן $28 = 2^2 \times 7 = 2^{3-1} \cdot (2^3 - 1)$ גם הוא משוכלל.

במאה ה- 18 הראה המתמטיקאי אוילר, כי כל מספר משוכלל זוגי מוכרח להיות מן הצורה הנ״ל: $2^{n-1}(2^n - 1)$ אשר בה $2^n - 1$ הוא ראשוני. מכאן החיפוש אחרי מספרים מן הסוג 2^n-1 שהם ראשוניים.

בעזרת אלגברה ניתן להוכיח, כי תנאי הכרחי לכך שמספר מן הסוג 2^n-1 יהיה ראשוני הוא ש- n בעצמו יהיה ראשוני. במילים אחרות, אם n **איננו** ראשוני, גם 2^n-1 לא יהיה ראשוני. מאידך תנאי זה **איננו מספיק**. כי לא קשה למצוא מספרים מן הסוג 2^n-1 אשר בהם n הוא ראשוני ובכל זאת 2^n-1 אינו ראשוני.
למשל $2^{11} - 1 = 2047$ **איננו** ראשוני, אף כי 11 הוא מספר ראשוני. (מהו הגורם הראשוני הקטן ביותר המחלק את 2047?).

לפיכך, משך דורות חיפשו מספרים ראשוניים n, כאלה, שגם 2^n-1 יהיה ראשוני. בשנת 1644 פרסם הנזיר הצרפתי מריו מרסן (Mario Mersenn 1588-1648) את הרשימה הבאה של מספרים שלדעתו הם מקיימים את התכונה הנ״ל. המספרים של מרסן היו 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.
שימו לב: כל המספרים האלה הם ראשוניים, ומרסן טען שעבור כל אחד ממספרים אלה, גם 2^n-1 הוא ראשוני.

בדיקות מאוחרות שנמשכו כשלוש מאות שנה, בעזרת מחשבים וכן ע״י שימוש בשיטות מסובכות, גילו שמרסן טעה. המספרים 67 ו- 257 **אין להם** תכונה זאת. מאידך הוא פסח על המספרים 89 ו- 107 שהם בעלי התכונה הנ״ל. המספרים מן הצורה 2^n-1, שבהם n ראשוני והמספר עצמו גם ראשוני, נקראים מאז **מספרי מרסן**. עד היום ממשיכים לחפש בעזרת מחשבים אחרי מספרים כאלה.

״מספרי מרסן ומספרי פרמה״, שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס׳ 40, ניסן תשל״ה
הטכניון, חיפה

מספרים דומים בצורתם למספרים הקודמים הם מספרים ראשוניים מן הסוג 2^n+1. במספרים אלה עסק המתמטיקאי הצרפתי בן המאה ה- 17, פרמה (Pierre de Fermat).

עבור כל n אי זוגי גדול מ- 1, או עבור כל n שיש לו מחלק אי זוגי כזה, לא קשה להוכיח כי 2^n+1 אינו יכול להיות ראשוני. לכן דנים רק ב- n כאלה **שאין** להם מחלק אי זוגי גדול מ- 1. מספר שאין לו מחלק אי זוגי (שונה מ- 1), מוכרח להיות חזקה של 2. כלומר מחפשים מספרים מן הצורה $2^{2^t}+1$. מספרים כאלה הם לפי הסדר:

$2^{2^0}+1=2+1=3$ $2^{2^1}+1=2^2+1=5$ $2^{2^2}+1=2^4+1=17$

$2^{2^3}+1=2^8+1=257$ $2^{2^4}+1=2^{16}+1=65{,}537$ $2^{2^5}+1=2^{32}+1$ **וכו'**.

פרמה טען שכל אלה הם ראשוניים, אף כי הוא אמר במפורש שאין לו הוכחה מדוייקת לכך.

החשיבות של מספרים אלה עלתה במאה ה- 19 כאשר המתמטיקאי הדגול גאוס (Carl Friedrich Gauss) הראה את הקשר בינם לבין מספר הצלעות של אותם המצולעים המשוכללים שאפשר לחסום אותם במעגל בעזרת סרגל ומחוגה בלבד.

אולם במאה ה- 18 הראה אוילר כי פרמה טעה! המספר $2^{2^5}+1=2^{32}+1$ איננו ראשוני, הוא מתחלק ב- 641! מאז **לא הצליחו למצוא אף מספר** מהסוג $2^{2^t}+1$ עבור t גדול מ- 4 שיהיה ראשוני! כל המספרים מסוג זה שהצליחו לחקור את מחלקיהם התגלו כמורכבים!

ובכן, אף לחוקרים דגולים קורה שהשערותיהם מתגלות כבלתי נכונות.

והנה שתי בעיות לחקירה עצמית:

1. ע"י שימוש בנוסחה $2^{n-1}(2^n-1)$ נסו למצוא את שני המספרים המשוכללים הזוגיים שאחרי 28.
2. נסו להוכיח שכל מספר מן הצורה 2^n+1, כאשר n יש לו מחלק אי זוגי גדול מ- 1, מתחלק בלי שארית ב- 3.