

## הנושא: **כמה בעיות למחשבה**

הוכן ע"י : שמואל אביטל.

תקציר : בחומר שלוש בעיות : שתיים עוסקות במציאת תבנית לפעולות בין מספרים (אחת מהן של פסקל) והשלישית היא חידה בה יש למצוא את גילאי שלושה בנים על סמך נתונים מסויימים.

מילות מפתח : אלגברה, הכללה, תבנית, חשבון, מספרים טבעיים, פירוק לגורמים, כפל, חיבור, חיסור, חזקה, שבר פשוט, שבר עשרוני, פסקל, חידה (חידות).

החומר הוגש במסגרת : גליונות לחשבון מס' 41, אייר תשל"ה.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 2 עמודים.

## כמה בעיות למחשבה

1. בליז פסקל (Blaise Pascal 1593-1662) היה מתמטיקאי צרפתי ידוע, אשר כבר בילדותו הצטיין במתמטיקה. בגיל צעיר מצא פסקל משפט המסתתר מאחורי התבניות הבאות:

$$1 + 2 = 3 \quad , \quad 6 \times 3 = 18 \quad , \quad 18 + 1 = 19$$

$$3^3 - 2^3 = 27 - 8 = 19$$

$$6 \times (1 + 2) + 1 = 3^3 - 2^3$$

וגם  
ומכאן

$$1 + 2 + 3 = 6 \quad , \quad 6 \times 6 = 36 \quad , \quad 36 + 1 = 37$$

$$4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$$

$$6 \times (1 + 2 + 3) + 1 = 4^3 - 3^3$$

וגם  
ומכאן

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad , \quad 6 \times 10 = 60 \quad , \quad 60 + 1 = 61$$

$$5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$$

$$6 \times (1 + 2 + 3 + 4) + 1 = 5^3 - 4^3$$

וגם  
ומכאן

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad , \quad 6 \times 15 = 90 \quad , \quad 90 + 1 = 91$$

$$6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$$

$$6 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 1 = 6^3 - 5^3$$

וגם  
ומכאן

- א. נא לתת שתי דוגמאות נוספות המתאימות לתבניות אלה.  
 ב. נא לנסח השערה למשפט, שלפי דעתך, הוא קשור בתבניות אלה.  
 ג. נא להוכיח את השערתך.

2. והנה דוגמה נוספת לתבניות ומבנים. הפעם בשברים:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{16} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

בידקו שאמנם  
כל אלה נכונים!

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25} \qquad (0.3)^2 + 0.7 = 0.3 + (0.7)^2 = 0.79$$

$$3^2 + (-2) = 3 + (-2)^2 = 7$$

- א. נא לתת שתי דוגמאות נוספות המתאימות לתבנית אלה.  
 ב. נא לנסח השערה למשפט הקשור, לפי דעתך, לתבניות אלה.  
 ג. נא להוכיח את השערתך.

3. מר כהן פוגש את מר לוי ברחוב, אחרי שלא ראה אותו 20 שנה, ומספר לו שיש לו 3 בנים אשר מכפלת הגילאים שלהם היא 36, ואילו סכום הגילאים כמספר הבית שהם עומדים לידו. מר לוי חושב רגע ועונה, שכדי לחשב את הגילאים של הילדים, הוא זקוק לנתון נוסף. על כך עונה מר כהן, אה כן, הבכור אוהב פיתה ופלפל, והבן הצעיר ממנו בהרבה, מוכן לחיות רק על גלידה.  
 בני כמה הם הבנים של מר כהן?

פתרונות:

1. **ההשערה** היא שאם מחסרים זו מזו שתי חזקות שלישיות של מספרים עוקבים, הרי ההפרש גדול ב-1 משש פעמים הסכום של כל המספרים הטבעיים מ-1 עד למספר הקטן מבין השניים. השערה זו נכונה כי נניח שהמספרים הם  $n$  ו- $(n+1)$ .

הפרש החזקות השלישיות שלהם הוא

$$(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1$$

מאידך, הסכום של כל המספרים הטבעיים מ-1 עד  $n$  הוא:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

אם כופלים מספר זה ב-6 ומוסיפים 1 מקבלים את התוצאה הקודמת.

2. ההשערה היא שאם נתונים שני מספרים לא שליליים **שהסכום שלהם 1**, הרי הסכום של אחד מהם ושל ריבוע השני שווה לסכום של השני וריבוע הראשון.

השערה זו נכונה, ואומנם יהיו המספרים  $a$ ;  $1-a$

$$a^2 + (1-a) = a^2 - a + 1$$

$$a + (1-a)^2 = a + 1 - 2a + a^2 = a^2 - a + 1$$

3. נרשום את כל האפשרויות לקבלת מכפלה של שלושה מספרים טבעיים השווה ל-36. ליד המכפלה נרשום את סכום שלושת המספרים:

$36 \times 1 \times 1$	$36 + 1 + 1 = 38$	$9 \times 4 \times 1$	$9 + 4 + 1 = 14$
$18 \times 2 \times 1$	$18 + 2 + 1 = 21$	$6 \times 6 \times 1$	$6 + 6 + 1 = 13$
$12 \times 3 \times 1$	$12 + 3 + 1 = 16$	$6 \times 3 \times 2$	$6 + 3 + 2 = 11$
$9 \times 2 \times 2$	$9 + 2 + 2 = 13$	$4 \times 3 \times 3$	$4 + 3 + 3 = 10$

מר לוי, היודע את מספר הבית שעל ידו הם עומדים, היה צריך לדעת מיד את התשובה אילו מספר הבית היה 38 או 21, או 16, או 14, או 11, או 10, כי כל אחד מאלה מתאים למכפלה יחידה של שלושה מספרים.

למשל, אילו היה מספר הבית 21, ברור שגילאי הילדים היו: 18, 2, ו-1.

אילו היה מספר הבית 16, הרי שגילאי הילדים היו 12, 3, ו-1 וכו'.

ובכן, מדוע היסס מר לוי? כנראה בגלל שהיו לו שתי אפשרויות. עיון בטבלה מגלה ששתי

האפשרויות האלה הן:  $6 \times 6 \times 1$  ו- $9 \times 2 \times 2$  בשני המקרים הסכום הוא 13, שלפי כל הסימנים זה היה מספר הבית שליידו הם עמדו.

התשובה של מר כהן, כי הבכור אוהב פיתה ופלאפל נתנה לו את התשובה. כי מהתשובה

משתמע **שיש בכור**, המבוגר בהרבה מן הצעיר ממנו, לכן האפשרות היחידה היא  $9 \times 2 \times 2$  כי

לפי הבחירה השניה  $6 \times 6 \times 1$ , שני הילדים הראשונים היו תאומים.