הנושא: **ריבוע כסכום שני ריבועים**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר פיתוח תבנית המאפשרת גילוי שלשות פיתגוריות ובעיות למחשבה להרחבה עבור חזקה שלישית.

מילות מפתח: אלגברה, גיאומטריה, משפט פיתגורס, שלשה פיתגורית, נוסחת כפל מקוצר, חזקה, מספרים זרים, מחלק משותף.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 41, אייר תשל"ה.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

ריבוע כסכום שני ריבועים

ומה עם חזקות שלישיות?

כולכם מכירים את משפט פיתגורס. נוכל לנצל משפט זה כדי לבנות ריבוע, אשר מידת שטחו שווה לסכום מידות השטח של שני ריבועים נתונים. כך למשל, נתונים שני ריבועים אשר מידות השטח שלהם הן p^2 ו- q^2. נבנה משולש ישר זווית, אשר מידות האורך של שני הניצבים שלו הן p ו- q ואז מידת השטח של הריבוע הבנוי על היתר תשתווה לסכום שתי מידות השטח של הריבועים הנתונים.
באופן חשבוני פירוש הדבר למצוא שלישייה של מספרים כאלה, שהריבוע של מספר אחד שווה לסכום שני הריבועים של שני המספרים האחרים. הדבר המעניין הוא למצוא שלישייה כזאת כך שכל שלושת המספרים יהיו שלמים. כל שלישייה כזאת נקראת השם **שלשה פִּיתַגוֹרִית**.

מסתבר שזה כלל לא קשה למצוא שלישיות פיתגוריות.

נבחר שני מספרים שלמים כלשהם a ו- b כך ש- $a > b$ וניצור בעזרתם את שלושת המספרים $a^2 - b^2$, $2ab$, $a^2 + b^2$.

שלושת המספרים האלה יקיימו את הדרוש כי מתקיים:
$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$.

נביא כמה דוגמאות מספריות:
אם $a=2$, $b=1$ אזי $(a^2 - b^2) = 4 - 1 = 3$, $2ab = 4$ ו- $a^2 + b^2 = 5$.
ומתקיים $3^2+4^2=5^2$. שלישייה זאת נקראת גם בשם המשולש המצרי.

אם $a=3$, $b=2$ נקבל את השלישייה $a^2 - b^2 = 5$, $2ab = 12$, $a^2 + b^2 = 13$.
ומתקיים $5^2 + 12^2 = 13^2$. שלישייה זו מכונה בשם המשולש הסיני.

האם קיימים קשרים דומים בין חזקות שלישיות של מספרים? ננסה למצוא רביעייה של מספרים שלמים, כך שהסכום של החזקות השלישיות של שלושה מהם ישווה לחזקה השלישית של המספר הרביעי. אין דרך פשוטה למציאת שלישות כאלה, אך ניתן להעזר בנוסחה של $(a+b)^3$ כדי ליצור שלישיות כאלה.
הנה לדוגמה רביעייה כזאת אשר בה כל ארבעת המספרים הם בני ספרה אחת (לפי בסיס 10)
$1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3$ ואומנם $1 + 216 + 512 = 729$ וגם $9^3 = 729$.
נסו לגלות רביעייה אחרת בעלת אותן התכונות. כלומר, כל אחד מארבעת המספרים נכתב בעזרת ספרה אחת (לפי בסיס 10) וסכום החזקות השלישיות של שלושה מהם שווה לחזקה השלישית של הרביעי.
התוכלו לגלות רביעיות נוספות, מבלי לשמור על הדרישה שהמספרים ייכתבו בעזרת ספרה אחת?

מעניין גם לחקור את התכונות של שלשות פיתגוריות. למשל, תוכלו לחקור כיצד יש לבחור את המספרים הטבעיים a ו- b כדי שהשלישיה הפיתגורית המתקבלת בעזרתם תהיה בעלת מספרים זרים הדדי, כלומר שלאף שניים מהם לא יהיה מחלק משותף גדול מ- 1.

"ריבוע כסכום שני ריבועים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 41, אייר תשל"ה
הטכניון, חיפה