הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

הנושא: **אינסוף מחוברים ובכל זאת מספר**

הוכן ע״י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר על חישוב של טורים סופיים ואינסופיים.

מילות מפתח: אלגברה, סדרה, טור סופי, טור אינסופי, משפט אוילר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס׳ 41, אייר תשל״ה.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

אינסוף מחוברים ובכל זאת מספר

כאשר בטור $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$ ממשיכים להוסיף יותר ויותר איברים, הרי הטור **איננו מתכנס**, כלומר הסכום גדל מעל כל מספר שהוא.
במשך הרבה זמן ניסו לחקור מה קורה אם במכנה של השברים נשים לא את המספרים הטבעיים אלא את הריבועים שלהם. כלומר, השאלה היתה מה קורה בטור $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$?
(3 הנקודות פירושן: הוסף איברים כרצונך לפי אותה תבנית).
ברור היה שהטור מתכנס, כלומר ככל שנוסיף איברים הסכום יתקרב יותר ויותר למספר מסוים, כך, שההפרש בין הסכום לבין מספר זה נעשה קטן כרצוננו.
אבל השאלה היתה מהו מספר זה, שהסכום מתקרב אליו יותר ויותר?
הראשון שפתר את הבעיה היה מתמטיקאי אוילר (Leonard Euler 1707-1783) יליד שוויץ, אשר חי ופעל ברוסיה. אוילר הוכיח את המשפט המפתיע כי הסכום מתקרב יותר ויותר למספר $\frac{\pi^2}{6}$.
המעניין הוא שעל סמך הטענה של אוילר אפשר לחשב את הסכום של טורים אין סופיים נוספים, ואומנם:

נניח כנכון כי $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+.\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$

נחלק את הסכום ב- 2^2 (זה שקול כנגד כפל ב- $\frac{1}{4}$). במקרה זה מותר לעשות זאת ע"י כך שנחלק **כל** שבר ב- 2^2, כלומר ב- 4.
נקבל כי

$$\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 2^2}+\frac{1}{3^2\cdot 2^2}+\frac{1}{4^2\cdot 2^2}+...=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+...=\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi^2}{24}$$

התוצאה נכונה בטור כזה, למרות שמדובר פה כביכול בסכום של אין סוף איברים.

אם נחסר את הסכום האחרון מן הראשון שחישב אוילר, (מותר לחסר את הסכומים איבר איבר, בגלל שכל האיברים חיוביים), נראה שיתבטלו כל האיברים שהמכנה שלהם זוגי וישארו רק אותם האיברים אשר המכנה שלהם אי-זוגי.
נקבל:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{3\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

אם נחסר **שוב** את סכום השברים שהמכנה שלהם זוגי מסכום השברים שהמכנה שלהם אי-זוגי, ונעשה זאת שוב איבר איבר, נקבל

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+...=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{3\pi^2-\pi^2}{24}=\frac{2\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}$$

ניתן להשתמש בשיטה דומה גם עבור טורים שמופיע בהם מספר סופי של איברים.

"אינסוף מחוברים ובכל זאת מספר", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 41, אייר תשל"ה
הטכניון, חיפה

למשל נחשב:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{9\times 10}$$

ננסה לגלות אם לא קיים פה מבנה מסוים, שנוכל מייד לגלות את הסכום.
לשם כך נחשב את הסכומים החלקיים:

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\times 4}=\frac{8+1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

עולה ההשערה כי הסכום יהיה תמיד שבר אשר בו המונה הוא המספר הראשון מהמכפלה המופיעה במכנה, והמכנה הוא המספר השני. לפי השערה זאת, הסכום הכולל בשאלה שלנו שבה מגיעים עד $\frac{1}{9\times 10}$, יהיה $\frac{9}{10}$.

דבר זה נכון. נסו להוכיח זאת, תוך שימוש בעובדה כי $\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ וכו'.

נסו לחשב, בדרך דומה לזאת שהשתמשנו בה ביחס למשפט של אוילר, את הסכומים:

$$\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{6\times 8}+\frac{1}{8\times 10}+\ldots+\frac{1}{18\times 20}=?$$

וכן את

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\ldots+\frac{1}{9\times 11}=?$$