

הנושא: **כמה גפרורים נחוצים?**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר על חקירת הקשר בין מספר הגפרורים הדרושים לבניית מלבן שמידותיו נתונות, או משולש שמידותיו נתונות.

מילות מפתח: אלגברה, הנדסה, מלבן, משולש, גפרורים, הכללה, תבנית מספר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 42, תשרי תשל"ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

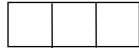
כמה גפרורים נחוצים?



א. דרושים ארבעה גפרורים כדי לבנות ריבוע שמידותיו 1×1 , כאשר יחידת המידה היא אורך גפרור אחד.



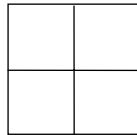
כדי לבנות מלבן, שמידותיו 2×1 , דרושים 7 גפרורים. (כאן ובהמשך, הכוונה היא לבנות את הצורה מחולקת ליחידות ריבועיות של 1×1).



כדי לבנות מלבן שמידותיו 3×1 יחידות, דרושים 10 גפרורים.

לא קשה להכליל. כדי לבנות מלבן שמידותיו $n \times 1$, כאשר n מספר טבעי כלשהו, דרושים $3n+1$ גפרורים.

לכן אם נרצה לבנות מלבן שמידותיו, למשל 7×1 יחידות ריבועיות, נזדקק ל- 22 גפרורים.



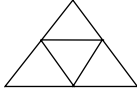
כדי לבנות מלבן 2×2 (עם חלוקת למשבצות!) נזדקק ל- 12 גפרורים. מהו מספר הגפרורים הנחוצים כדי לבנות מלבן שמידותיו:

(1) 2×3 (2) 2×4 (3) 2×5 .

נסו להכליל למקרה של $2 \times n$ מלבנים.

נסו להעלות השערה בדבר מספר הגפרורים הדרושים כדי לבנות מלבן שמידותיו $n \times m$ כאשר m ו- n הם מספרים טבעיים כלשהם. בידקו את ההשערה ונסו להוכיחה.

ב. כדי לבנות משולש, שמידת האורך של כל אחת מצלעותיו 1 יחידה, נחוצים 3 גפרורים.



כדי לבנות משולש שבכל אחת מצלעותיו 2 יחידות (כמו בציור) נחוצים 9 גפרורים.

(גם כאן הכוונה למשולש עם חלוקה למשולשים קטנים, שמידת כל צלע שלו היא 1).

אם בכל אחת מצלעות המשולש 3 יחידות, נזדקק ל- 18 גפרורים.

לכמה גפרורים נזדקק, אם בכל אחת מצלעות המשולש יהיו n יחידות?

פתרון:

א. כדי לבנות מגפרורים מלבן של m שורות, כשבכל שורה n ריבועים נזדקק ל: $(m+1) \cdot n$ גפרורים שעומדים אופקית ול- $(n+1) \cdot m$ גפרורים שעומדים אנכית. סה"כ מספר הגפרורים הדרושים הוא:

$$(m + 1) \cdot n + (n + 1) \cdot m = mn + n + nm + m = 2mn + n + m$$

ב. כדי לבנות מגפרורים משולש שבכל אחת מצלעותיו n יחידות (כולל חלוקה פנימית למשולשים קטנים) נזדקק ל- 3 גפרורים לכל משולש ויש סה"כ $1+2+3+\dots+n$ משולשים. לכן נזדקק ל: $3 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)$ גפרורים.