

## הנושא: חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים

### בסרגל ובמחוגה

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר על זווית מסוימות שניתן לחלקן לשלושה חלקים שווים. זווית כלשהי לא ניתנת לחלוקה לשלושה חלקים באופן מדויק, אך קיימת חלוקה מקורבת שניתנה ע"י המתמטיקאי הוא שטיינהאוז.

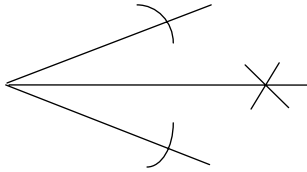
מילות מפתח: גיאומטריה, הנדסה, גיאומטריה המישור, בניה, חציית זווית, חלוקת זווית לשלושה חלקים, קירוב, טריגונומטריה, הסטוריה של המתמטיקה, יוון, פולין, שטיינהאוז הוגו.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 42, תשרי תשל"ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

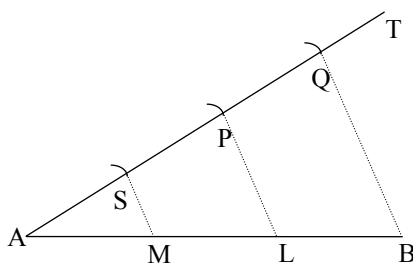
## חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים בסרגל ובמחוגה

כבר בתחילת הגיאומטריה לומדים בבית הספר כיצד אפשר לחלק כל זווית נתונה, לשני חלקים שווים ע"י בנייה שבה משתמשים בסרגל ובמחוגה בלבד. הציון מראה כיצד אפשר לעשות זאת בפתיחה אחת של המחוגה, כלומר, כל המעגלים שאנו חגים הם בעלי אותו רדיוס.



אם אפשר לחלק זווית לשני חלקים שווים, בסרגל ובמחוגה, אפשר גם לחלקה, בעזרת אותם כלים, ל- 4, 8, 16... חלקים שווים. (כיצד?)

בגיאומטריה לומדים גם כיצד אפשר לחלק קטע נתון ל- n חלקים שווים עבור כל n שלם.



למשל, אם רוצים לחלק את הקטע הנתון AB ל- 3 חלקים שווים, מציירים קרן כלשהי דרך אחת מקצות הקטע (בציון שלנו הקו AT). מקצים עליה, בעזרת המחוגה, שלושה קטעים שווים כלשהם  $AS=SP=PQ$ , מחברים את הקצה Q עם הקצה השני - קצה B של הקטע. דרך P ו-S מעבירים מקבילים לשר  $QB$ :  $PL$  ו-  $SM$  הנקודות L ו-M מחלקות את AB לשלושה חלקים שווים.

באותה דרך אפשר גם לחלק כל קטע נתון למספר חלקים שווים, כרצוננו.

והנה כבר היוונים הקדמונים הופתעו, שכאשר ניסו למצוא שיטה לחלוקת זווית נתונה לשלושה חלקים שווים, לא הצליחו לעשות זאת בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. אמנם ישנן זוויות רבות שעבורן הדבר קל ביותר. למשל, אפשר לחלק זווית שטוחה, בת  $180^\circ$ , ל- 3 חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה - פשוט בונים משולש שווה צלעות.

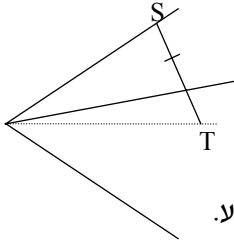
קל גם לחלק זווית בת  $90^\circ$  לשלושה חלקים שווים, בעזרת סרגל ומחוגה. (כיצד?). הוא הדין ביחס לזווית בת  $45^\circ$ . (כיצד?).

אבל כאשר ניסו לחלק לשלושה חלקים שווים זווית בת  $60^\circ$ , בעזרת סרגל ומחוגה בלבד, לא הצליחו בכך.

היוונים גם הצליחו לבנות זוויות בנות  $75^\circ$  ו-  $72^\circ$  וע"י כך הצליחו לבנות זווית בת  $3^\circ$ . אבל כאשר ניסו לחלק זווית כזאת ל- 3 חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה, ולקבל ע"י כך זווית בת  $1^\circ$ , לא הצליחו בכך.

נסיונות שונים לפתרון כללי של הבעיה נמשכו במשך דורות רבים, ורק במאה ה- 18 הצליחו להוכיח שהדבר בלתי אפשרי. כלומר, אכן קיימות זוויות שאי אפשר לחלקן ל- 3 חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה, והזוויות בנות  $60^\circ$  ו-  $3^\circ$  שייכות באמת לסוג הזה שעבורן הדבר בלתי אפשרי.

עד כה מדובר בחלוקה מדויקת - כלומר חלוקה שעבורה אפשר יהיה להוכיח בדרך גיאומטרית שכל חלק הוא שלישי מדויק של הזווית הנתונה. עם זאת ישנן בניויות מקורבות רבות - בניויות שבהן הזווית הנבנית היא כמעט שלישי מהזווית הנתונה.



אחת הבניות המקורבות ניתנה ע"י מתמטיקאי יהודי שחי בפולין בשם הוגו שטיינהאוז. להלן הבניה :  
נחלק תחילה את הזווית הנתונה ל- 2 חלקים שווים.  
נעביר את המיתר באחד החצאים שקיבלנו - ST בציר.  
נחלק עתה את הקטע ST לשלושה חלקים שווים. כפי שראינו קודם, קל לעשות זאת בעזרת סרגל ומחוגה.  
נעביר עתה קרן דרך קדקוד הזווית ודרך נקודת החלוקה הקרובה לאמצע. קרן זאת תחתוך מהזווית הנתונה "כמעט בדיוק" שליש מגודלה.  
הוכחת הבנייה של שטיינהאוז, נעשית תוך שימוש בטריגונומטריה.

חיקרו כיצד אפשר לבנות, בעזרת סרגל ומחוגה, זווית בת  $3^\circ$ ?  
(רמז : חישבו על המחומש המשוכלל).