

הנושא : כמה בעיות למחשבה

הוכן ע"י : שמואל אביטל.

תקציר : בחומר מוצגות חמש בעיות הקשורות למספרים טבעיים. המשותף לבעיות אלה הוא שאין

להן פיתרון. לשתיים מן הבעיות מצורפת הוכחה לכך שאין להן פתרון .

מילות מפתח : בעיות מילוליות, חשבון, אלגברה, מספרים טבעיים, מספרים זוגיים, מספרים אי-

זוגיים, מספרים ראשוניים, התחלקות, מחלק משותף גדול ביותר, חזקות, תבניות מספר,

נוסחאות הכפל המקוצר.

החומר הוגש במסגרת : גליונות לחשבון מסי' 43, טבת תשל"ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : עמוד אחד.

כמה בעיות למחשבה

חכמים היזהרו במעשיכם

בכל הבעיות המובאות כאן יש תכונה מיוחדת המשותפת לכולן. חקרו תחילה כל בעיה ע"י מספר דוגמאות (לפחות חמש), ונסו למצוא את המשותף לכל הבעיות. אם לא תצליחו, נסו גישה אחרת לפתרון הבעיה.

1. מצאו שני מספרים טבעיים x ו- y כך ש- $x+y=100$ והמחלק המשותף הגדול ביותר של x ו- y יהיה 3.
2. מצאו את המספר הטבעי הקטן ביותר בעל התכונה שכאשר מגדילים את הריבוע שלו ב-2 הסכום המתקבל יתחלק ב-4.
3. מצאו את החזקה הקטנה ביותר של 2 שאפשר לרשום אותה כסכום של שניים או יותר מספרים טבעיים עוקבים.
4. מצאו זוג של מספרים טבעיים איזוגיים אשר סכום הריבועים שלהם מתחלק ב-4.
5. מצאו את המספר הראשוני הקטן ביותר אשר אפשר לכתבו כסכום שני מספרים טבעיים אשר המחלק המשותף הקטן ביותר שלהם גדול מ-1.

תשובה:

המשותף לכל חמש הבעיות הנ"ל שאין להן פתרון. ניתן להוכיח זאת תוך שימוש באלגברה ובתכונות ההתחלקות של מספרים. להלן מספר פתרונות:

פתרון בעיה מס' 2

צריך למצוא מס' טבעי n כזה כך ש: $n^2 + 2$ יתחלק ב-4. נבחין בין שני מקרים:

א. n זוגי, לכן $n = 2m$ ונקבל: $n^2 + 2 = (2m)^2 + 2 = 4m^2 + 2$

קיבלנו ביטוי הנותן שארית 2 בחלוקה ב-4, ולכן אינו מתחלק ב-4.

ב. n אי זוגי, לכן $n = 2m + 1$ ונקבל:

$$n^2 + 2 = (2m + 1)^2 + 2 = 4m^2 + 4m + 1 + 2 = 4(m^2 + m) + 3$$

קיבלנו ביטוי הנותן שארית 3 בחלוקה ב-4, ולכן אינו מתחלק ב-4.

מסקנה: לא ניתן למצוא מס' טבעי, שכאשר מגדילים את הריבוע שלו ב-2, הסכום המתקבל יתחלק ב-4.

פתרון בעיה מס' 4

נקח שני מספרים איזוגיים. ניתן לרשום: $2n + 1$, $2m + 1$

ע"י תנאי הבעיה, מחפשים מספרים שעבורם: $(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2$ יתחלק ב-4. נפשט את הביטוי:

$$(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 4(n^2 + n + m^2 + m) + 2$$

קיבלנו ביטוי שנותן שארית 2 בחלוקה ב-4, ולכן אינו מתחלק ב-4.

מסקנה: לא ניתן למצוא שני מספרים איזוגיים, כך שסכום ריבועיהם יתחלק ב-4.