הנושא: **מפתיע ובכל זאת פשוט**

הוכן ע״י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגת דרך למציאת שלשות של מספרים שיכולים להוות אורכים במשולש ישר זווית (מקיימים את משפט פיתגורס). מוצגת דרך למציאת שלשות של מספרים טבעיים, ודרך כללית למציאת שלשות של מספרים חיוביים בעלי התכונה שסכום של ריבועי שתי צלעות שווה לסכומן.

מילות מפתח: חשבון, אלגברה, מספרים טבעיים, מספרים ממשיים, תבנית מספר, פרוק לגורמים, חזקות, משפט פיתגורס, שלשה פיתגורית.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס׳ 43, טבת תשל״ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

מפתיע ובכל זאת פשוט

משפט פיתגורס מבטיח לנו שאם נבנה משולש ישר זווית הרי הריבוע של מידת האורך של היתר, במשולש זה, ישווה לסכום הריבועים של מידות האורך של שני הניצבים. כלומר, אם מידות האורך של הניצבים הן x ו- y ומידת האורך של היתר היא z הרי $x^2 + y^2 = z^2$.

קל מאד למצוא דוגמאות למשולשים כאלה שבהם המספרים x , y , z הם מספרים טבעיים.

לדוגמה: $x = 3 , y = 4 , z = 5$ מקיימים $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = z^2$

משולש זה ידוע בשם: <u>המשולש המצרי</u>.

דוגמה אחרת: $x = 12, y = 5, z = 13$ מקיימים $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

משולש זה ידוע בשם: <u>המשולש הסיני</u>.

ניתן להוכיח בקלות, כי אם בוחרים שני מספרים טבעיים כלשהם m ו- n בתנאי ש- $m > n$ הרי כל שלישיה x , y , z המקיימת $x = m^2 - n^2 , y = 2mn$ ו- $z = m^2 + n^2$ מקיימים גם $x^2 + y^2 = z^2$.

לא פחות מעניינת היא הבעיה הבאה:

ניקח את שני המספרים 0.4 ו-1.2, ונחשב את סכום הריבועים שלהם:

$0.4^2 + 1.2^2 = 0.16 + 1.44 = 1.6$.

כלומר המספרים $0.4,\ 1.2,\ \sqrt{1.6}$ יוכלו לשמש כמידות אורך של צלעות משולש ישר זווית.

נחבר את המספרים $1.2 + 0.4 = 1.6$! !

קיבלנו שסכום מידות האורך של צלעות המשולש שווה לסכום הריבועים שלהן!

האם זו דוגמה בודדת, שאין דומה לה?

ברור כי $x = y = 1$ וכן $x = y = 0$ מקיימים גם הם את התכונה שהזכרנו, אבל האם ישנן דוגמאות מעניינות אחרות?

מתברר שכן:

גם הזוג 1.2 ו- 0.6 מקיימים את התכונה הדרושה:

$$1.2^2 + 0.6^2 = 1.44 + 0.36 = 1.8 = 1.2 + 0.6$$

נשאלת השאלה האם כל הדוגמאות האלה הן מקרים בודדים או שנוכל למצוא דרך כללית ליצירת אין סוף דוגמאות כאלה?

הבה ננסה:

אנו מעוניינים בזוגות של מספרים חיוביים a ו- b המקיימים $a^2 + b^2 = a + b$ (האם יתכנו זוגות של מספרים שליליים בעלי תכונה זאת? האם ייתכן שמספר אחד יהיה חיובי והשני שלילי?).

נרכז, בשוויון הנ״ל, באגף אחד את הביטויים המכילים את המשתנה a ובאגף השני נרכז את הביטויים המכילים את המשתנה b ונקבל $a(a - 1) = b(1 - b)$. מכאן ברור מייד כי כאשר בוחרים מספר אחד, נניח a, כגדול מ- 1, המספר השני בזוג צריך להיות בין 0 ו- 1.

שיטה מקובלת בבעיות מסוג זה היא לנסות לבטא גם את a וגם את b בעזרת משתנה שלישי שנסמנו ב- k כי אז כאשר קובעים ערך כלשהו עבור k מקבלים מייד ערכים מתאימים עבור a ו- b המקיימים את הדרוש.

נניח שהיחס בין a ל- b הוא k כלומר: $k = \frac{a}{b}$ $\Leftarrow$ $a = kb$. נציב את a בנוסחה הנ"ל ונקבל:

$bk(bk - 1) = b(1 - b)$

אמרנו כבר שאנו מעוניינים רק בערכים חיוביים עבור b, ולכן נוכל להניח ש: $b \neq 0$ ולצמצם ב- b.

נקבל: $k(bk-1) = 1 - b$ ומכאן: $k^2b - k = 1 - b$ ולכן $k^2b + b = 1 + k$ או: $b(k^2+1) = 1 + k$

כלומר $b = \frac{k+1}{k^2+1}$ (האם יכול לקרות שהמכנה יהיה אפס בתבנית זו?)

נחשב את a: $a = kb = \frac{k(k+1)}{k^2+1}$

לסיכום, קיבלנו שהזוג $b = \frac{k+1}{k^2+1}$, $a = \frac{k(k+1)}{k^2+1}$ מקיימים את הדרוש בשביל <u>כל ערך שנציב במקום k</u>.

ניתן להוכיח זאת, בעזרת חישוב אלגברי פשוט:

עבור $k = 1$ נקבל: $b = 1$ ו- $a = 1$. זוג זה לא מחדש כלום.

עבור $k = 2$ נקבל: $a = \frac{2 \cdot (2+1)}{4+1} = \frac{6}{5} = 1.2$, $b = \frac{2+1}{4+1} = \frac{3}{5} = 0.6$, וזו אחת הדוגמאות שהכרנו.

עבור $k = 3$ נקבל: $a = \frac{3 \cdot (3+1)}{9+1} = 1.2$, $b = \frac{3+1}{9+1} = 0.4$ וזו הדוגמה השניה שהבאנו לעיל.

עבור $k = 4$ נקבל: $a = \frac{5}{17}$, $b = \frac{20}{17}$

$\frac{25}{17} = \frac{17 \cdot 25}{17 \cdot 17} = \frac{425}{289} = \frac{400}{289} + \frac{25}{289} = a^2 + b^2$ ואמנם $a + b = \frac{25}{17}$.

תוצאה אחרת הנותנת מספרים שקל לזכור אותם מתקבל עבור $k = 7$ כי אז:

$b = \frac{7+1}{49+1} = \frac{8}{50} = 0.16$ ו- $a = 7 \cdot 0.16 = 1.12$ ושוב $0.16 + 1.12 = 0.16^2 + 1.12^2$

מן הפתרון הכללי נובע שיש מספר אין סופי <u>לזוגות מספרים רציונליים</u> המקיימים את הדרוש.
כדאי לחקור בדרך דומה את האפשרות על קיום זוגות מספרים a ו- b שעבורם $a^3 + b^3 = a + b$.

"מפתיע ובכל זאת פשוט", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 43, טבת תשל"ו
הטכניון, חיפה