הנושא: **מספרים פירמידליים**

הוכן ע״י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגים המספרים המשולשים, המספרים הריבועיים, המספרים הארבעונים והמספרים הפירמידליים - משמעותם הגיאומטרית, התבניות לחישובם והקשרים ביניהם.

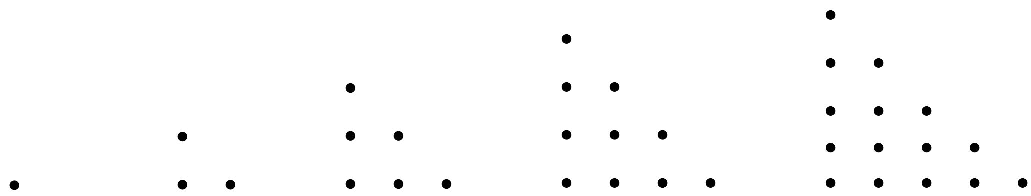
מילות מפתח: גיאומטריה, אלגברה, מספרים צורניים, מספרים משולשים, מספרים ריבועיים, מספרים פירמידליים, סדרות, סדרה חשבונית, סכום סדרה.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס׳ 43, טבת תשל״ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

מספרים פירמידליים

מספרים משולשים הם מספרים המתקבלים מסכומים של מספרים טבעיים עוקבים ואפשר לייצגם בעזרת קבוצות של נקודות שניתן לערוך אותן במשולש:

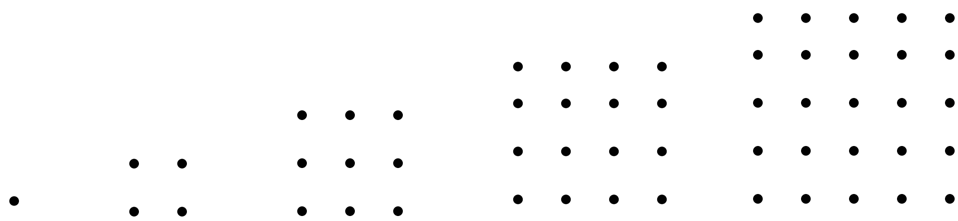


1   1+2=3   1+2+3=6   1+2+3+4=10   1+2+3+4+5=15

המספר המשולש הראשון ($n=1$) הוא 1
המספר המשולש השני ($n=2$) הוא 3
המספר השלישי ($n=3$) הוא 6, וכו'.

הנוסחה ליצירת מספרים משולשים היא $n\frac{(n+1)}{2}$

המספרים הריבועיים הם מספרים המתקבלים מסכומים של מספרים טבעיים אי-זוגיים עוקבים, וניתן לייצגם בעזרת קבוצות של נקודות שניתן לערוך אותן בצורת ריבוע:



1   1+3=4   1+3+5=9   1+3+5+7=16   1+3+5+7+9=25

המספר הריבועי הראשון $(n = 1)$ הוא 1.
המספר הריבועי השני $(n = 2)$ הוא $2^2=4$.
המספר הריבועי השלישי $(n = 3)$ הוא $3^2=9$ וכו'.

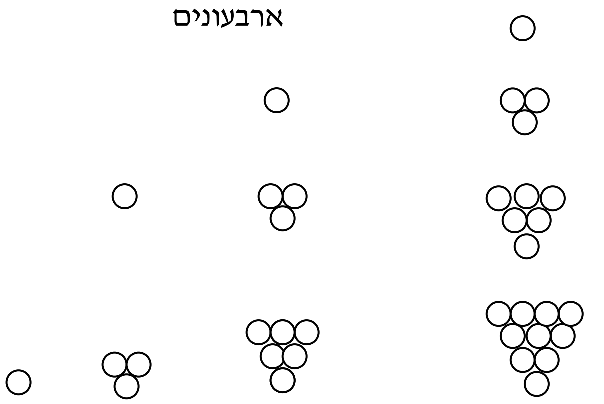
הנוסחה ליצירת הריבועים פשוטה ביותר: n^2.

נוכל עתה לשאול מהו אופי המספרים המתקבלים כאשר מחברים זה לזה, לפי הסדר את המספרים המשולשים?
נחברם ונקבל:
1 , 1+3=4 , 1+3+6=10 , 1+3+6+10=20, 1+3+6+10+15=35

השאלה העיקרית היא: מהו אופיים של מספרים אלה? האם נוכל להתאים גם להם תבניות גיאומטריות? מסתבר שכן. מספרים אלה מתארים את מספרי הכדורים המסודרים בפירמידות שהבסיסים שלהן הם משולשים.

"מספרים פירמידליים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 43, טבת תשל"ו
הטכניון חיפה

יש לראות את השכבות ערוכות זו על גבי זו כאשר מספר הכדורים בכל שכבה הוא מספר משולש.



1   1+3=4   1+3+6=10   1+3+6+10=20

התבנית הגיאומטרית קובעת גם את השם של מספרים אלה. כאשר מסדרים את השכבות, זו על גבי זו, מקבלים פירמידה בצורת ארבעון (טטרהדרון). לכן מכנים מספרים אלה בשם: המספרים הארבעוניים.

קיימת גם נוסחה הקובעת את המספר הארבעוני עבור כל n. הנוסחה היא: $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

ואמנם:

עבור $n = 1$ מקבלים 1

עבור $n = 2$ מקבלים $\frac{1}{6}\times 2\times 3\times 4 = 4$

עבור $n = 3$ מקבלים $\frac{1}{6}\times 3\times 4\times 5 = 10$

עבור $n = 4$ מקבלים $\frac{1}{6}\times 4\times 5\times 6 = 20$

שאלה דומה נשאל ביחס למספר הריבועיים:

א) מהם המספרים המתקבלים כאשר מחברים את המספרים הריבועיים זה לזה לפי הסדר?

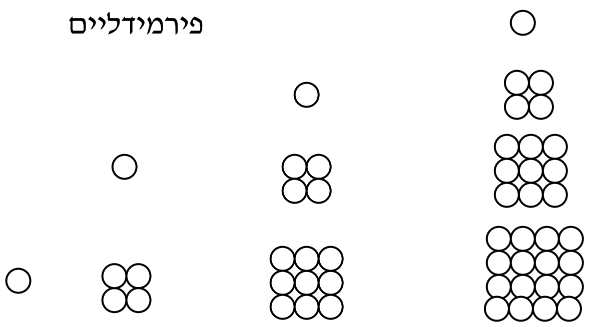
ב) מהן התבניות הגיאומטריות, אם ישנן כאלה, המתאימות למספרים המתקבלים מחיבור המספרים הריבועיים זה לזה, לפי הסדר?

נחברם ונקבל:

1 , 1+4=5 , 1+4+9=14 , 1+4+9+16=30 , 1+4+9+16+25=55

מתברר שגם כאן מתארים המספרים המתקבלים את מספר הכדורים הנחוצים כדי לערוך כדורים בפירמידה, אלא שהפעם בסיס הפירמידה הוא ריבוע:

יש לראות את השכבות כערוכות זו על גבי זו כך שנוצרת פירמידה שבה מספר הכדורים בכל שכבה הוא מספר ריבועי.



1   1+4=5   1+4+9=14   1+4+9+16=30

"מספרים פירמידליים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 43, טבת תשל"ו
הטכניון חיפה

נכנה מספרים אלה בשם מספרים פירמידליים.

הסכום של מספרים ריבועיים עוקבים הוא: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

עבור 1 =n מקבלים $\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3=1$

עבור 2 =n מקבלים $\frac{1}{6}\times 2\times 3\times 5=5$

עבור 3 = n מקבלים $\frac{1}{6}\times 3\times 4\times 7=14$ וכו'.

והנה כמה שאלות לחקר עצמי:

1) האם ישנה פירמידה ארבעונית ערוכה מכדורים שאפשר לשטוח בה את הכדורים ולעורכם בצורת משולש במישור? במילים אחרות: האם ישנם מספרים משולשים השווים למספרים ארבעונים. או בצורת נוסחה: עבור אלו m ו- n קיים $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{m(m+1)}{2}$

ברור שהדבר נכון עבור $m = n = 1$.

כמו כן מקבלים שוויון עבור $m = 4$ ו- $n = 3$. כלומר, אפשר לשטוח פירמידה ארבעונית בת 3 שכבות שיש בה 10 כדורים ולערוך כדורים אלה בצורת משולש שיש בו 4 שורות. השאלה הנשאלת האם ישנם עוד m ו- n בעלי תכונה זאת?

במילים אחרות: האם פרט ל- 1 ו- 10 ישנם עוד מספרים משולשים שהם סכומים של מספרים משולשים?

2) נוכל לשאול שאלה דומה ביחס למספרים הפירמידליים הריבועיים. האם פרט ל- $n = m = 1$ ישנם עוד m ו- n כאלה שעבורם $m^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

או במילים אחרות: האם ישנן פירמידות ריבועיות ערוכות מכדורים כך שאפשר לשטוח את כל הכדורים ולערוך אותם בצורת ריבוע במישור?

או: האם ישנו סכום של ריבועים עוקבים שהוא בעצמו ריבוע?

רמז: ישנו מספר אחד כזה.

3) נסו לגלות מספרים משולשים שהם גם מספרים ריבועיים. כלומר, יש למצוא מספרים משולשים כאלה, שכאשר נתארם כערוכים מנקודות, אפשר לערוך את הנקודות מחדש כך שיווצר ריבוע.

רמז: ישנם כאלה.