הנושא: **על מספרים ובסיסים**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגות תכונות של סיפרנים שתוקפות בכל בסיס בו הם רשומים, ותכונות כלליות משותפות למספרים הרשומים בבסיסים שונים.

מילות מפתח: חשבון, סיפרן, בסיס ספירה, חזקה, ריבוע של מספר, אלגברה, טכניקה אלגברית, נוסחאות הכפל המקוצר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 44, ניסן תשל"ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

על מספרים ובסיסים

אם נכפיל את המספר 11 בעצמו ונרשום את התוצאה בבסיס עשר, נקבל 121.
כלומר, בבסיס עשר הסיפרן 121 מסמל את הריבוע של המספר 11. (שימו לב! במונח – "סיפרן" הננו מתייחסים למערכת הספרות המסמנות את המספר).

נשאל את עצמנו, האם סיפרן זה יסמן ריבוע גם בבסיסים אחרים שבהם יש לו משמעות?

מלכתחילה ברור שבבסיס שתיים אין לסיפרן 121 כל משמעות (מדוע?)

אבל מה בדבר הבסיס שלוש? הבה נבדוק.
$16 = 1 + 6 + 9 = 121_{\text{שלוש}}$
קיבלנו שוב ריבוע.

ומה בדבר בסיס ארבע?
$25 = 1 + 8 + 16 = 121_{\text{ארבע}}$
גם זה ריבוע.

ומה בדבר בסיס חמש?
$36 = 1 + 10 + 25 = 121_{\text{חמש}}$
גם זה ריבוע.

נבדוק גם את בסיס שש:
$49 = 1 + 12 + 36 = 121_{\text{שש}}$
גם הוא ריבוע.

עולה ההשערה, שאם נמשיך לבדוק את הסיפרן 121 בבסיסים נוספים נקבל בקביעות ריבוע של מספר שלם. נסו זאת במספר בסיסים נוספים.

אבל גם אם נאמת את ההשערה במאה, אלף או מיליון דוגמאות נוספות, עדיין לא תהיה זו הוכחה, ועדיין נוכל לשאול "האם הדבר נכון בכל בסיס?".

שאלה אחרת שנוכל לשאול היא, האם כל הסיפרנים המסמנים ריבוע של מספר שלם בבסיס עשר יסמנו ריבוע בבסיסים אחרים, שבהם יש לסיפרן מובן?

הבה נבדוק לדוגמא את הסיפרן המסמן, בבסיס עשר, את הריבוע של המספר 15.
$225 = 15_{\text{עשר}} \times 15_{\text{עשר}}$
לסיפרן 225 יש משמעות רק מבסיס שש ומעלה (מדוע?)

הבה נבדוק בבסיס שש:
$89 = 5 + 12 + 72 = 225_{\text{שש}}$
ובכן, כבר בבסיס שש ההשערה שלנו לא התאמתה. מכאן, התכונה ששיערנו ביחס לסיפרן 121 וודאי איננה קיימת ביחס לכל הסיפרנים המסמנים ריבוע בבסיס עשר.

עתה מתעוררות שתי שאלות:
א. מה מיוחד בסיפרן 121, אם אמנם הוא מסמן ריבוע בכל בסיס שבו יש לו משמעות?
ב. אם אמנם השערתנו נכונה ביחס לסיפרן 121, הנוכל לגלות סיפרנים נוספים שיסמנו ריבוע בכל בסיס שבו יש להם מובן?

"על מספרים ובסיסים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 44, ניסן תשל"ו
הטכניון, חיפה

כאשר רוצים להוכיח, כי השערה מסויימת נכונה בכל בסיס, לא נוכל לעשות זאת ע"י בדיקת דוגמאות נוספות, אלא נצטרך להוכיח את הדבר באופן כללי.

אפשר בעזרת אלגברה להוכיח את הדבר באופן כללי:
הסיפרן 121 לפי בסיס כלשהו b מסמן $1\times b^2+2\times b+1=b^2+2b+1=(b+1)^2$
לכן הסיפרן 121 מסמן תמיד את הריבוע של מספר הגדול ב- 1 מן הבסיס!
ואמנם: בבסיס שלוש הוא סימן שש עשרה – את הריבוע של ארבע, בבסיס חמש הוא סימן שלושים ושש – את הריבוע של שש וכו'.
בזאת הראינו כי הסיפרן 121 יסמן ריבוע <u>בכל</u> בסיס שבו יש לו מובן.

חקירה נוספת תגלה שהסיפרן 144, המסמן בבסיס <u>עשר</u> את הריבוע של שתים-עשרה, גם הוא מסמן ריבוע בכל בסיס שבו יש לו משמעות. הוכיחו זאת בדרך דומה לקודמתה.

נסו לגלות סיפרנים המסמנים חזקות שלישיות מסויימות בבסיס עשר ואשר יסמנו אותה חזקה בכל בסיס אחר שבו יש להם מובן.

והנה דוגמא לבעיה מסוג אחר הניתנת להכללה לבסיסים שונים:
המספר תשע יש לו תכונה מעניינת בבסיס 10:
$9 + 9 = 18$ ו- $9 \times 9 = 81$
כלומר, הסיפרן המסמן את הריבוע של המספר 9 והסיפרן המסמן את התוצאה של כפל 9 ב- שתיים, נכתבים בעזרת אותן ספרות, רק בסדר הפוך.

נבדוק האם דבר זה מיוחד לבסיס עשר?

המספר תשע קטן ב- 1 מהבסיס. כיצד נראה הדבר בבסיסים אחרים?
בבסיס <u>שתים</u> עלינו לבדוק תכונה זו עבור 1; בבסיס <u>שלוש</u> עבור 2; בבסיס <u>ארבע</u> עבור 3 וכו'.

בבסיס שתיים	$1 + 1 = 10_{\text{שתיים}}$	ו- $1 \times 1 = 01$
בבסיס שלוש	$2 + 2 = 4 = 11_{\text{שלוש}}$	ו- $2 \times 2 = 4 = 11_{\text{שלוש}}$
בבסיס ארבע	$3 + 3 = 6 = 12_{\text{ארבע}}$	ו- $3 \times 3 = 9 = 21_{\text{ארבע}}$
בבסיס חמש	$4 + 4 = 8 = 13_{\text{חמש}}$	ו- $4 \times 4 = 16 = 31_{\text{חמש}}$
בבסיס שש	$5 + 5 = 10 = 14_{\text{שש}}$	ו- $5 \times 5 = 25 = 41_{\text{שש}}$

אם נמשיך לבדוק נוכל רק לחזק את ההשערה כי הדבר נכון בכל בסיס.

כדי <u>להוכיח</u> זאת נזדקק שוב לאלגברה:
בבסיס כלשהו b אנו מתעניינים ברישום הריבוע של $(b-1)$ וברישום המכפלה של $(b-1)$ ב- 2
ואמנם $(b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 = b(b-2) + 1$

כלומר, הסיפרן המתאים למספר זה בבסיס b מורכב מהספרות $(b-2)$ ו- 1.
מאידך, המכפלה של $(b-1)$ ב- 2 היא $2(b-1) = 2b - 2 = b + (b-2) = 1 \times b + (b-2)$ והסיפרן המתאים למספר זה גם הוא מורכב מהספרות 1 ו- $(b-2)$.
כלומר שני הסיפרנים אמנם מורכבים מאותן הספרות, רק בסדר הפוך.

גם תוצאה זאת ניתנת להכללה. נוכל לשאול למשל: מהו אופי המספרים המורכבים מאותן הספרות אבל בסדר הפוך? למשל: שלוש פעמים $(b-1)$ או ארבע פעמים $(b-1)$ וכו'.

נסו לחקור זאת.

"על מספרים ובסיסים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 44, ניסן תשל"ו
הטכניון, חיפה