

הנושא: **בעיה פתוחה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגת בעיה שלא נפתרה עד היום: האם בין כל שני מספרים ריבועיים עוקבים קיים לפחות מספר ראשוני אחד?

מילות מפתח: קבוצות מספרים, מספרים טבעיים, מספרים ריבועיים, מספרים ראשוניים, חשבון, אלגברה, תורת המספרים, בעיה פתוחה.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מסי' 45, תשל"ו.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

בעיה פתוחה

למרות ההתפתחות העצומה של המתמטיקה נותרו בה הרבה בעיות שהן פתוחות – בעיות שעד היום פתרון אינו ידוע. במיוחד רבות בעיות כאלה בתורת המספרים, שזו התורה העוסקת בתכונות של המספרים הטבעיים והשלמים.

הנה דוגמה לבעיה כזאת:

בקבוצת המספרים הטבעיים קיימת תת-קבוצה של מספרים שהם ריבועיים: המספרים 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196 וכו'.

כן קיימת תת-קבוצה אחרת של מספרים ראשוניים (המספרים המתחלקים רק בשני מספרים טבעיים ב-1 ובמספר עצמו): המספרים 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 וכו'.

נתבונן עתה בפיזור היחסי של שתי תת-קבוצות אלה, אחת ביחס לשניה. בין המספרים הריבועיים 1 ו-4 נמצאים המספרים הראשוניים 2 ו-3. בין המספרים הריבועיים 4 ו-9 נמצאים המספרים הראשוניים 5 ו-7. בין המספרים הריבועיים 9 ו-16 נמצאים המספרים הראשוניים 11 ו-13. בין המספרים הריבועיים 16 ו-25 נמצאים המספרים הראשוניים 17, 19 ו-23. בין המספרים הריבועיים 25 ו-36 נמצאים המספרים הראשוניים 29 ו-31.

ברור שככל שנתקדם בתחום המספרים הטבעיים כך יגדל הרוחק בין הריבוע של מספר והריבוע של המספר אחריו. כמו כן יגדל הרוחק בין מספר ראשוני והמספר הראשוני הבא אחריו.

נשאלת השאלה: האם תמיד, גם כאשר נתקדם ככל שנרצה בתחום של המספרים הטבעיים הגדולים יותר, נמצא לפחות מספר ראשוני אחד בין כל שני מספרים ריבועיים עוקבים? במילים אחרות: יהיו n ו- $n+1$ שני מספרים טבעיים עוקבים. הריבועיים שלהם יהיו n^2 ו- $(n+1)^2$.

השאלה היא: האם קיים תמיד מספר ראשוני p כך שיתקיים $n^2 < p < (n+1)^2$?

מתמטיקאים העוסקים בתורת המספרים שאלו שאלה זאת כבר לפני זמן רב. הם גם ניסו לחקור אותה בדרכים שונות ועד היום לא הצליחו. כלומר, עד היום לא הצליחו למצוא זוג מספרים ריבועיים עוקבים שביניהם לא ימצא מספר ראשוני. מאידך, לא הצליחו להוכיח באופן כללי שאומנם תמיד נוכל למצוא מספר ראשוני כזה בין כל שני מספרים ריבועיים עוקבים.