

הנושא: בעיות למחשבה

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגות שתי בעיות למחשבה: האחת על הצגת ריבוע של מספר טבעי אי-זוגי כסכום מספרים טבעיים עוקבים, והשניה על מספר המספרים הראשוניים בין עשרה מספרים טבעיים.

מילות מפתח: חשבון, אלגברה, סדרות, סדרה חשבונית, מספרים טבעיים, תורת המספרים, מספרים ראשוניים, מספרים אי-זוגיים, הכללה, גישה אינדוקטיבית.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 46, תשרי תשל"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

בעיות למחשבה

בעיה ראשונה

$$3^2 = 2+3+4$$

$$7^2 = 4+5+6+7+8+9+10$$

$$9^2 = 5+6+7+8+9+10+11+12+13$$

$$1^2 = 1$$

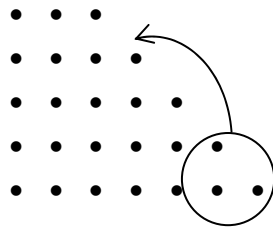
$$5^2 = 3+4+5+6+7$$

אם נרצה לרשום סכום כזה עבור 13^2 באיזה מספר נצטרך להתחיל ובאיזה לסיים?
ומה לגבי 17^2 ?

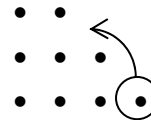
נא להכליל את מסקנותיך עבור מספרים אי-זוגיים כשלהם מן הצורה $2n + 1$.

הדרכה: אפשר לתת תיאור גיאומטרי בעזרת נקודות לבעיה:

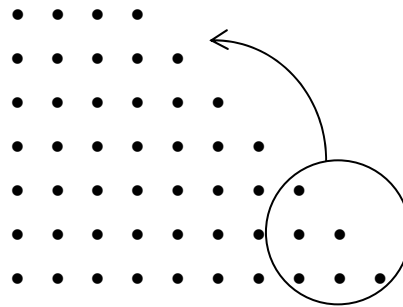
$$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$



$$3^2 = 2 + 3 + 4$$



$$7^2 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$



מכאן ניתן להגיע גם לפירוש אריתמטי:

$3^2 = 2 + 3 + 4$. בסכום מופיעים שלושה מחוברים, שהאמצעי ביניהם 3. אם מחסרים 1 מן המספר 4 ומוסיפים אותו למספר 2 מקבלים: $3^2 = 3 \times 3$

$5^2 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$. בסכום מופיעים חמישה מחוברים שהאמצעי ביניהם 5. אם מחסירים 2 מן המספר 7 ומוסיפים אותו למספר 3, מחסירים 1 מן המספר 6 ומוסיפים אותו למספר 4, מקבלים $5^2 = 5 \times 5$.

נא לבצע ניתוח אריתמטי דומה עבור 7^2 , 9^2 ו- 11^2 . רצוי לבצע את התאור בנקודות ואת ההסבר האריתמטי.

באותו אופן ניתן להגיע להוכחה אינטואיטיבית של המקרה הכללי.

בעיה שניה

בין עשרת המספרים הטבעיים 1, 2, 3, ..., 10 ישנם ארבעה מספרים ראשוניים והם 2, 3, 5, 7.
גם בעשרת השניה 11, 12, 13, ..., 20 ישנם ארבעה מספרים ראשוניים והם 11, 13, 17, 19.
(שימו לב! 1 אינו נחשב כמספר ראשוני).

מהי העשרת הבאה שגם בה יש בדיוק ארבעה מספרים ראשוניים?

האם תיתכן עשרת שיהיו בה יותר מארבעה מספרים ראשוניים? נא לנמק.