

הנושא: מסובך ובכל זאת פשוט

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצג משפט שהוכח ע"י לואיס פוסה כאשר היה בן 12, לפיו בין $k+1$ מספרים כלשהם מבין המספרים הטבעיים מ-1 עד $2k$ ימצאו תמיד שני מספרים זרים זה לזה. מובאת הוכחה למשפט זה ומוצגות מספר שאלות נוספות דומות.

מילות מפתח: חשבון, אלגברה, מספרים טבעיים, מספרים זרים, פוסה לואיס.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 46, תשרי תשל"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

מסובך ובכל זאת פשוט

לא פעם קורה במתמטיקה שמשפט הנראה מסובך מוכח בדרך פשוטה ביותר ע"י רעיון שלכאורה רחוק מאוד מן הבעיה שבה דנים. נביא כאן דוגמה של הוכחה כזאת שניתנה לפי דברי המתמטיקאי היהודי פאול ארדש, החי בהונגריה, ע"י תלמיד בן 12 בשם לוואיס פוסה.

נבהיר תחילה כמה מושגים :

שני מספרים טבעיים נקראים זרים זה לזה אם אין להם מחלק משותף הגדול מ-1. למשל, המספרים 6 ו-35 הם זרים זה לזה אף כי אף אחד מהם אינו ראשוני. כך גם שני המספרים בכל אחד מהזוגות 9 ו-10, 10 ו-25, 10 ו-49, 10 ו-33 וכו', הם מספרים זרים זה לזה. לעומת זאת 11 ו-33 אינם זרים זה לזה כי יש להם מחלק משותף 11, כך גם 12 ו-14, 14 ו-49, 77 אינם זרים זה לזה.

המשפט שפוסה הוכיח אומר : אם נבחר $k+1$ מספרים כלשהם מבין המספרים הטבעיים $2k, \dots, 3, 2, 1$ הרי שתמיד יימצאו ביניהם שני מספרים שהם זרים זה לזה.

פוסה הוכיח את המשפט על סמך שתי התוצאות הפשוטות הבאות :

- (1) שני מספרים טבעיים עוקבים הם תמיד זרים זה לזה. (זה מובן מאליו, כי אם המספרים הם n ו- $n+1$, הרי אם n מתחלק בגורם כלשהו p ברור ש- $n+1$ יתן שארית 1 כאשר נחלקו ב- p).
- (2) מבין המספרים הטבעיים מ-1 עד $2k$ אפשר לבחור לכל היותר k מספרים שאף שניים מהם אינם עוקבים ולשם כך יש לבחור את המספרים $1, 3, 5, \dots, 2k-1$ או את המספרים $2, 4, 6, \dots$.

משתי עובדות אלה מתקבל מיד שאם בוחרים $k+1$ מספרים מתוך הקבוצה $2k, \dots, 3, 2, 1$ הרי שלפחות שניים מהם יהיו מספרים עוקבים ולפיכך הם יהיו גם זרים זה לזה. כך הסקנו תוצאה מפתיעה מטענות הנראות כמובנות מאליהן.

נסו לפתור את שתי השאלות הבאות :

- (i) אם ניקח רק k מספרים מבין המספרים הטבעיים מ-1 עד $2k$, האם גם אז מוכרחים להימצא ביניהם שניים שהם זרים זה לזה?
- (ii) אם במקום המספרים הטבעיים שבין 1 ל- $2k$ ניקח $2k$ מספרים טבעיים עוקבים כלשהם, האם גם אז תהייה נכונה הטענה שהוכיח פוסה?

הדברים שבמאמר זה מבוססים על פרק מתוך הספר : Mathematical Gems שנכתב ע"י R. Honsberger והוצא ע"י האיגוד המתמטי בארה"ב.