

הנושא: **בעיה למחשבה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאת בעיה הקשורה למצב, בו n חיילים המסודרים לפי הסדר, יכולים בכל שלב להישאר במקום או להחליף מקום עם חייל אחר.

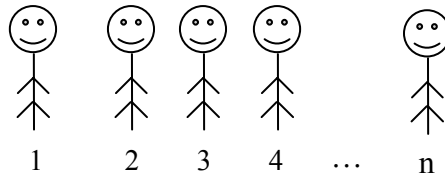
מילות מפתח: בעיות מחשבה, חידות.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מסי' 47, טבת תשלי"ז.

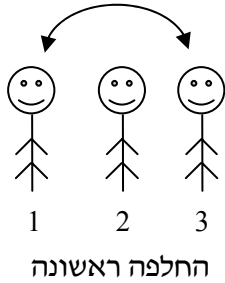
החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

בעיה למחשבה

בשורה ערוכים n חיילים:



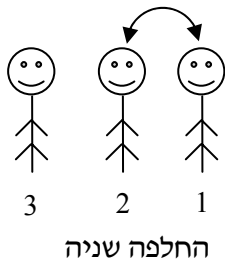
נמספר אותם, משמאל לימין, במספרים $1, 2, 3, \dots, n$. בהינתן פקודה: החלף! יכול כל חייל, לפי החלטתו הוא, או (1) להישאר במקום; או (2) להחליף את מקומו עם חייל אחר. האם אפשרי הדבר שלאחר שתי פקודות כאלה ייווצר מצב שבמקום הראשון (משמאל) ימצא חייל שמספרו n , (החייל שלפני ההחלפות היה במקום האחרון מימין), ושבמקומות השני, השלישי וכו' יעמדו, לפי הסדר, החיילים שמספריהם היו $1, 2, 3, \dots, n - 1$?



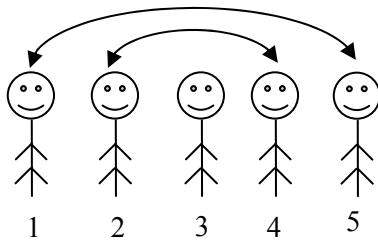
הבה נבדוק תחילה שתי דוגמאות כאשר מספר החיילים אי-זוגי:

אם היו בהתחלה 3 חיילים הדבר היה פשוט:

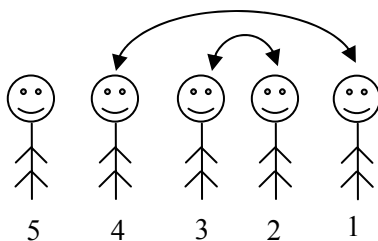
בפקודה ראשונה הזוג 1 ו-3 מחליפים מקום וחייל מספר 2 נשאר במקום.



בפקודה השניה, החיילים שמספריהם 1 ו-2 מחליפים מקום וחייל מספר 3 נשאר במקום (בראש השורה). התנאים הדרושים התמלאו.



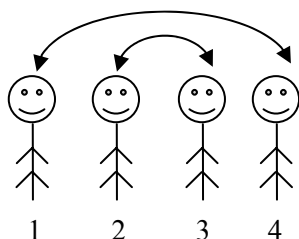
אם היו בהתחלה 5 חיילים, גם אז הדבר לא קשה. בפקודה הראשונה חייל מספר 3 נשאר במקום ושני החיילים בכל אחד מהזוגות (1, 5) ו-(2, 4) מחליפים מקום.



בפקודה השניה, חייל מס' 5 נשאר במקום שבו הוא נמצא (הראשון בשורה), ושני החיילים בכל אחד מהזוגות (1,4) וכן (2,3) מחליפים מקום.

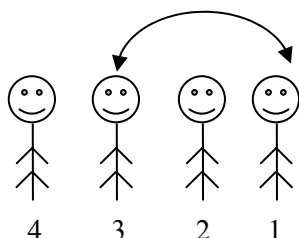
האם יש פתרון נוסף, שונה מהקודם, עבור $n = 5$?
האם ניתן להכליל פתרון זה למקרים שמספר החיילים הוא 7, 9, 11 וכו'.
כלומר לכל מספר אי-זוגי $2k + 1$?

מה בדבר מספרים זוגיים?
עבור $n = 4$ ישנם אפילו שני פתרונות:

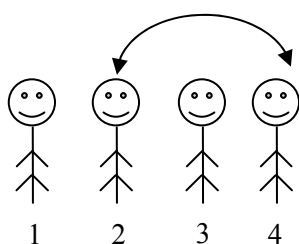


פתרון ראשון:

בפקודה הראשונה שני החיילים בכל אחד מהזוגות (1,4) וכן (2,3) מחליפים מקום.

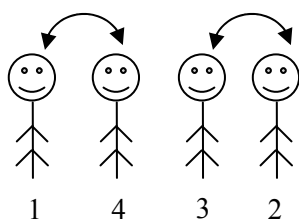


בפקודה השניה: חייל מס' 4 נשאר במקום (בראש השורה) והזוג (1,3) מחליף מקום.



פתרון שני:

בפקודה הראשונה: שני החיילים 1 ו-3 נשארים במקום ורק הזוג (2,4) מחליפים מקום.



בפקודה השניה: החיילים בכל אחד משני הזוגות (1,4) וכן (3,2) מחליפים מקום.

האם אפשר להכליל את שני הפתרונות למקרה של שישה חיילים?

התוכלו לתת פתרון למקרה הכללי כאשר מספר החיילים הוא זוגי $2k$?