

הנושא: **הכפולה המשותפת הקטנה ביותר (כמק"ב)**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאת בעיה בה רושמים מספר טבעי כסכום של מספרים טבעיים, בכל הדרכים האפשרויות, ויש לחקור לאיזה מבין כל הזוגות האפשריים, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר היא בעלת הערך הגדול ביותר.

מילות מפתח: חשבון, אלגברה, תורת המספרים, כפולה משותפת קטנה ביותר, מספר זוגי, מספר אי-זוגי, תבנית מספר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מסי' 47, טבת תשל"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר (כמק"ב)

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של שני מספרים טבעיים a ו-b הוא המספר הטבעי הקטן ביותר המתחלק (ללא שארית) בשני המספרים. הסימן המקובל לכמק"ב הוא [a,b]. למשל $[6,15] = 30$, כי 30 הוא המספר הקטן ביותר המתחלק גם ב-6 וגם ב-15.

נתבונן במספר טבעי כלשהו, למשל 9. נוכל לרשום מספר זה בהרבה אופנים כסכום של שני מספרים טבעיים: $8+1$, $7+2$, $6+3$, $5+4$. קיבלנו ארבעה זוגות של מספרים טבעיים. אם נחשב את הכמק"ב של כל זוג נקבל: $[8,1]=8$, $[7,2]=14$, $[6,3]=6$, $[5,4]=20$. קיבלנו שהזוג 5,4 נותן את הכמק"ב הגדול ביותר.

נשאל את השאלה באופן כללי:

נתון מספר טבעי n. נרשום אותו בכל הדרכים האפשרויות כסכום של שני מספרים טבעיים, כאשר סדר המחוברים אינו נלקח בחשבון, כלומר $a+b$ נחשב כזהה ל- $b+a$. לכל זוג של מחוברים נחשב את הכפולה המשותפת הקטנה ביותר. השאלה היא האם נוכל לקבוע באופן כללי לכל מספר טבעי נתון n איזה זוג מחוברים יתן את הכמק"ב בעלת הערך הגדול ביותר? כדי להעלות השערות בשאלה זאת, רצוי לבצע את החקירה באופן שיטתי. נעשה זאת עבור ערכים קטנים של n. ברור שהערך הקטן ביותר הבא בחשבון הוא $n=2$.

הכמק"ב לכל זוג	הסכומים השונים	n
$[1,1]=1$	$1+1$	2
$[1,2]=2$	$1+2$	3
$[3,1]=3$, $[2,2]=2$	$1+3$, $2+2$	4
$[1,4]=4$, $[2,3]=6$	$1+4$, $2+3$	5
$[1,5]=5$, $[2,4]=4$, $[3,3]=3$	$1+5$, $2+4$, $3+3$	6

המשיכו בעצמכם בחקירה ונסו להגיע להשערה.

רמז: אפשר להגיע יותר מהר להשערה אם מתבוננים בנפרד במספרים האי-זוגיים ובנפרד במספרים הזוגיים.

נסו לחקור בעצמכם בעיה דומה ביחס למחלק המשותף הגדול ביותר.

פתרון:

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של שני מספרים היא:

- עבור מספר אי-זוגי n כאשר המספרים הם: $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n+1}{2}$ ו-1
- עבור מספר זוגי n כאשר המספרים הם: $\frac{n}{2}-1$, $\frac{n}{2}+1$ ו-1