הנושא: **ארבע בעיות שהן אחת**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאות דוגמאות לבעיות הנראות במבט ראשון שונות זו מזו, אבל במהלך הפתרון מגלים שהן זהות לחלוטין כי אותה הדרך שלפיה פותרים בעיה אחת משמשת גם לפתרון של הבעיה השניה.

מילות מפתח: שיטת חקר, הוראה אינדוקטיבית, בעיות איזומורפיות, קומבינטוריקה, מספר אפשרויות, חוק הקיבוץ, גיאומטריה, גיאומטרית המישור, הנדסה, הנדסת המישור, מצולע, אלכסון.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 47, טבת תשל"ז
וגליונות לחשבון מס' 48, שבט תשל"ז

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

ארבע בעיות שהן אחת

לא פעם קורה במתמטיקה שבעיות הנראות שונות זו מזו, שאין ביניהן שום דבר משותף, מתגלות פתאום כזהות לחלוטין ואותה הדרך שלפיה פותרים אחת מהן משמשת גם לפתרון האחרות. נביא כאן ארבע בעיות כאלה אשר גישה אחת פותרת את כולן.

<u>בעיה מס׳ 1</u>

נרשום את הביטוי החשבוני: $30:6:3$. נראה בקלות שאין לביטוי זה כל משמעות, כי לאמיתו של דבר, אפשר לחשב ביטוי זה בשתי דרכים שונות ובכל פעם נקבל תשובה אחרת. נוכל לחשב ביטוי זה כ- $(30:6):3=5:3=\frac{5}{3}$

מאידך נוכל לחשב ביטוי זה כ- $30:(6:3)=30:2=15$

נשים לב שבעיה זאת קשורה בכך, שפעולה חשבונית מוגדרת בדרך כלל בין שני איברים. לפיכך, עלינו לקבץ את האיברים בביטוי לזוגות, בעזרת סוגריים. אולם בפעולות החילוק לא מתקיים חוק הקיבוץ. לפיכך, בצורות קיבוץ שונות נקבל, <u>בדרך כלל</u>, תשובות שונות.

כדי להבין את ההמשך עלינו לשים לב, שברגע ששמנו סוגריים מסביב לשני מספרים, עם סימן חילוק ביניהם, הפכנו אותם למספר אחד שהוא התוצאה של הפעולה.
לפיכך, $[(a:b):c]:d$ אומר לנו לבצע תחילה $a:b$, אח״כ לחלק את התוצאה ב- c ואת המספר שמתקבל לחלק ב- d, כך שבכל שלב ברור בין אלו שני מספרים הננו מבצעים את הפעולה.

כאשר נתונה פעולת חילוק בין ארבעה מספרים נקבל יותר אפשרויות. למשל, אם נתון $60:2:3:4$ נוכל לקבצם באופנים הבאים:

(i) $[(60:2):3]:4$ (ii) $(60:2):(3:4)$

(iii) $[60:(2:3)]:4$ (iv) $60:[(2:3):4]$

(v) $60:[2:(3:4)]$

קיבלנו <u>חמישה</u> אופני קיבוץ שונים.

שימו לב! אנו מדברים על אופני קיבוץ שונים, לאו דוקא על תוצאות שונות! כי בהחלט יתכן ששני אופני קיבוץ שונים יתנו תוצאה מספרית זהה.

מהו מספר האופנים השונים שאפשר לקבץ לזוגות ביטוי שמופיעים בו חמישה מספרים למשל:
$60:2:3:4:5$

נרמוז רק שמספר אופני הקיבוץ השונים, גדול ממספר האצבעות בשתי הידים.
נוכל להכין את הטבלה הבאה (השלימו):

מספר האיברים	2	3	4	5	6
מספר אופני הקיבוץ	1	2	5	14	?

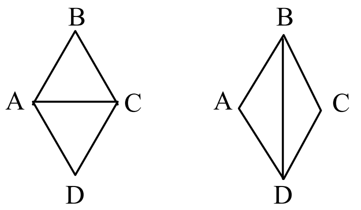
״ארבע בעיות שהן אחת״, שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס׳ 47, טבת תשל״ז וגליונות לחשבון מס׳ 48, שבט תשל״ז
הטכניון, חיפה

<u>בעיה מס׳ 2</u>

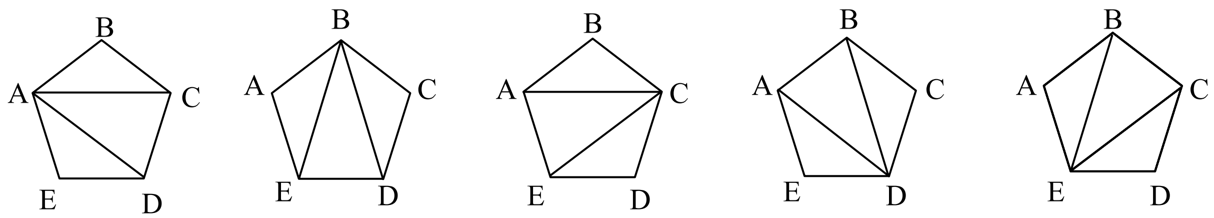
הבעיה השניה לקוחה מגיאומטריה.

אם נתון משולש כלשהו ΔABC, לא נוכל להעביר בו אף אלכסון.

אם נתון מרובע קמור ABCD נוכל לחלקו למשולשים בשני אופנים שונים ע״י העברת אלכסון אחד. החלוקות המתקבלות הן ΔABD, ΔBCD או ΔABC, ΔCDA.



אם נתון מחומש קמור ABCDE, נוכל לחלקו למשולשים בעזרת אלכסונים שאינם נחתכים ב- 5 אופנים שונים:



גלו בעצמכם בכמה אופנים שונים אפשר לחלק משושה קמור למשולשים ע״י העברת אלכסונים שאינם נחתכים.

גלו בעצמכם בכמה אופנים שונים אפשר לחלק משובע קמור למשולשים ע״י העברת אלכסונים שאינם נחתכים.

הטבלה המתקבלת היא:

המצולע	משולש	מרובע	מחומש	משושה	משובע
מספר החלוקות השונות	1	2	5	14	?

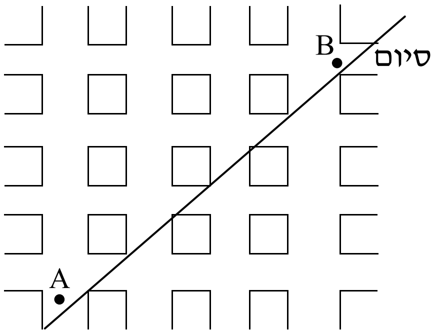
אם תמשיכו לחקור תגלו שאומנם יש לשתי הבעיות אותו פתרון. מדוע זה כך?

<u>בעיה מס׳ 3</u>

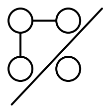
נתאר לעצמנו עיר שבה הרחובות עוברים בקוים ישרים מקבילים, ממזרח למערב, והשדרות עוברות גם כן בקווים ישרים, במקביל, מצפון לדרום. בכל מפגש של רחוב עם שדרה ישנה כיכר.

נהג מונית יוצא מכיכר A ונוסע כדי להגיע לנקודת הסיום בכיכר B. הנהג אינו רוצה לעבור ברחוב כלשהו פעמיים – וכמו כן לפי חוקי התנועה אסור לו להגיע לרחובות, או לכיכרות, שמתחת לקו האלכסון הראשון (הקו המסומן בציור). בכמה אופנים שונים יכול נהג זה להגיע לכיכר הסיום (הפינה הימנית למעלה)?

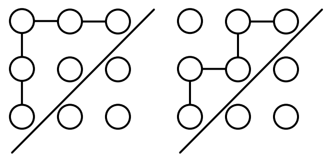
״ארבע בעיות שהן אחת״, שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס׳ 47, טבת תשל״ז וגליונות לחשבון מס׳ 48, שבט תשל״ז
הטכניון, חיפה



הבה נחקור בעיה זאת בצורה אינדוקטיבית. לשם פשטות הציור נסמן כל כיכר בעיגול קטן.

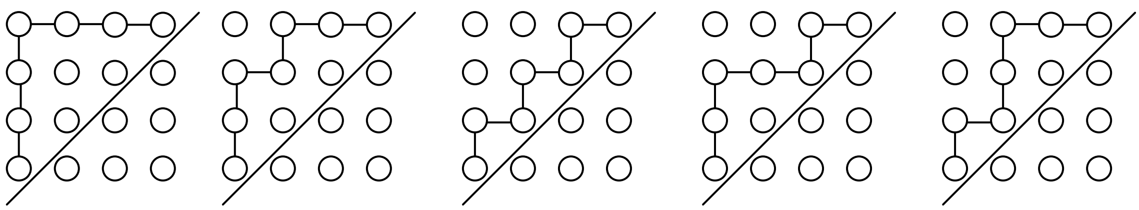


בריבוע של 4 כיכרות יכול נהג זה לנסוע בדרך אחת בלבד.



בריבוע של 9 כיכרות ישנן שתי דרכים אפשריות, כפי שרואים זאת בציור המצורף.

בריבוע של 16 כיכרות ישנן 5 דרכים שונות:

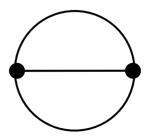


שוב קיבלנו את שורת המספרים 1, 2, 5. נסו לחקור בעצמכם את המקרה של 25 כיכרות ולגלות שלנהג יהיו אז 14 דרכים שונות.

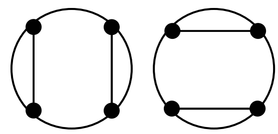
<u>בעיה מס׳ 4</u>

בעיה אחרת, שנותנת אותו פתרון, נוגעת לקבוצה של 2n אנשים, היושבים מסביב לשולחן עגול, ולוחצים ידיים, כך שהזרועות שלהם אינן מצטלבות. השאלה היא בכמה אופנים שונים יכולים האנשים לעשות זאת?

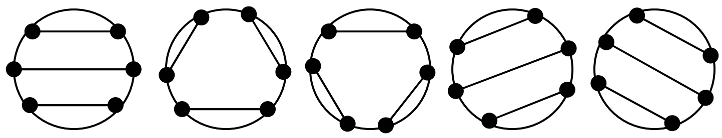
נוכל לצייר את המצבים השונים בעזרת נקודות במעגל.



כאשר ישנם 2 אנשים בלבד הם יכולים ללחוץ ידיים <u>בדרך אחת</u> בלבד.



כאשר ישנם 4 אנשים הם יכולים ללחוץ ידיים בשתי דרכים שונות כפי שנראה בציור.



כאשר ישנם שישה אנשים, הם יכולים ללחוץ ידיים בחמישה אופנים שונים.

נסו לחקור את המקרה של שמונה אנשים ולגלות שישנם 14 אופנים שונים לצרוף של זוגות בלחיצת ידיים (בלי שהזרועות יצטלבו).

ובכן שוב קיבלנו את סדרת המספרים 1, 2, 5, 14. ואומנם אפשר להוכיח שהדימיון בין ארבע הבעיות קיים גם במקרה הכללי.