

הנושא: כמה שאלות למחשבה

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאות שלוש שאלות הקשורות לנושאים הבאים: סכום של סדרת מספרים הופכיים למספרים טבעיים, סכום מספרים טבעיים ומספרים ראשוניים.

מילות מפתח: מספרים טבעיים, מספרים ראשוניים, מספרים ראשוניים תאומים, סדרות, סכום סדרה.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 48, שבט תש"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

כמה שאלות למחשבה

1. ידוע שאם מחברים את המספרים ההופכיים של המספרים הטבעיים

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$
 הסכום גדל מעל לכל מספר טבעי.
 2. קל לראות שהסכום $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ נותן מספר גדול מ-2. האם נקבל סכום גדול מ-3 כאשר נחבר את השברים

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$$
 אם תשובתכם שלילית מיצאו כמה מספרים צריך לחבר כדי לקבל סכום גדול מ-3.
2. שני אנשים משחקים משחק. בכל סיבוב של המשחק מקבל הזוכה או p נקודות או q נקודות, כאשר p קטן מ- q . בסוף המשחק מחברים את מספרי הנקודות שכל אחד מהזוכים קיבל בכל הסיבובים השונים. בהתאם לערכים של p ו- q יהיו כמובן, בכל משחק, ערכים מספריים כאלה שאי אפשר להגיע אליהם בסוף המשחק.

אם למשל $p = 3$ ו- $q = 5$, הרי ישנם בדיוק ארבעה סכומים של נקודות שאי אפשר להגיע אליהם והם 1, 2, 4 ו-7, אולם אפשר להגיע לכל סכום אחר. במשחק מסוים ידוע שישנם בדיוק 9 סכומים שונים, שאף זוכה לא יוכל להגיע אליהם אף פעם. מה הם הערכים של p ו- q ?
3. מספרים ראשוניים תאומים הם זוגות של מספרים ראשוניים אשר ההפרש ביניהם הוא 2. למשל הזוגות: 3,5 ; 5,7 ; 11,13 ; 17,19 ועוד.

אם נתבונן בזוגות שהבאנו כדוגמה נראה שהסכום של כל זוג, פרט לראשון, מתחלק ב-12. $17+19=3 \times 12$ $11+13=2 \times 12$ $5+7=1 \times 12$

מצאו זוג של מספרים ראשוניים תאומים, אשר בו שני המספרים גדולים מ-3, ואשר סכומם איננו מתחלק ב-12.

פתרונות:

1. יש לחבר 38 $\frac{1}{11}$ כדי לקבל סכום של 3.
2. המספרים p ו- q הם 4 ו-1. הערכים שאי אפשר להגיע אליהם הם: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17.
3. הצגה באתר אפשרי! הסכום של כל שני מספרים ראשוניים תאומים מתחלק ב-12. הסיבה לכך היא כי המספר שבין שני המספרים הראשוניים התאומים מוכרח להיות מספר זוגי - והוא מוכרח להתחלק עם 3. לכן, אחד המספרים הראשוניים מוכרח לתת שארית 1 בחילוק ב-3 והשני שארית 2. כמו כן אחד המספרים הראשוניים מוכרח לתת שארית 1 בחילוק ב-4 והשני שארית 3. לכן, סכומם מוכרח להתחלק עם 3 ולכן ב-12.