הנושא: **על מילים ומבנים**

הוכן ע״י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצג דיון וחקירה על מספר האופנים הקיימים לסידור מספר שונה של מילים באורך נתון ממספר אותיות נתון כאשר כל אות מופיעה במספר נתון של מילים וכל זוג אותיות מופיע במספר נתון של מילים. פתרון והסבר בעזרת גיאומטריה, כאשר האותיות משמשות כנקודות והקוים כמילים.

מילות מפתח: קומבינטוריקה, צירופים, אותיות, מילים.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס׳ 48, שבט תשל״ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

על מילים ומבנים

להלן מערכת של שבע מילים אנגליות ערוכות בשלוש קבוצות:

DRY	BED	AYE
ORE	BAR	ADO
	BOY	

מה משותף למבנה של שבע מילים אלה?

עיון וניתוח יביא אותנו לגילוי שבמבנה של שבע מילים אלה מתקיימות התכונות הבאות:

1. בכל המילים מופיעות רק שבע האותיות A, B, D, E, O, R, Y
2. כל מילה מכילה שלוש אותיות בדיוק, לא פחות ולא יותר.
3. כל אות מופיעה בדיוק בשלוש מילים.
4. כל זוג אותיות מופיע ביחד במילה אחת בדיוק.

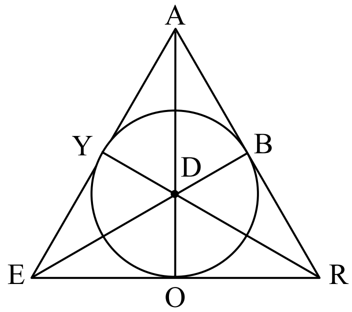
והנה שבע מילים עבריות המקיימות גם כן את התכונות שמנינו:

אדם	דפי	שפם	אפר
איש	דרש	מרי	

בדקו שאומנם מתקיימים ארבעת התנאים שמנינו.

שימו לב! לסדר האותיות במילה אין אנו מייחסים כל חשיבות. בעצם אפשר לראות כל צרוף של אותיות כמילה. שתי מלים עם אותן אותיות, בסדר שונה, נחשבות כזהות.

נוכל לתאר מבנה בעזרת נקודות וקוים, כך שלכל אות נתאים נקודה ולכל מילה נתאים קו (לאו דווקא ישר!!). לעובדה שאות מסויימת מופיעה במילה תתאים העובדה שנקודה מסויימת נמצאת על קו. למערכת המילים שרשמנו לעיל יתאים הציור הבא:



בדקו שאומנם מתקיימים ארבעת התנאים שמנינו לעיל.

יש לשים לב כי:

(i) רק הנקודות המסומנות באות שייכות למערכת.

(ii) אחד הקווים הוא מעגל והוא מתאים למילה BOY.

<u>הכללה</u>:

ננסה עתה להכליל את המבנה. נניח שישנן p אותיות היוצרות m מילים. כל מילה מורכבת מ- k אותיות בדיוק. כל אות מופיעה ב- r מילים שונות. כל זוג של אותיות מופיע ביחד בדיוק ב- z מילים.

כדי להבין את ההכללה כדאי לשים לב, שבדוגמה הקודמת של שבע מילים (או שבע הנקודות והקווים) היה $p = 7$, $m = 7$, $k = 3$, $r = 3$ ו- $z = 1$.

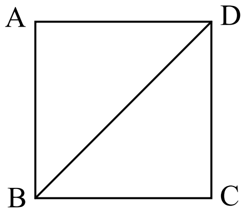
דוגמה מוכללת פשוטה אפשר לבנות ע"י בחירת $p = 4$, $m = 4$, $k = 3$, $r = 3$ ו- $z = 2$.

נבחר למשל את האותיות A, B, C, D ונבנה את המילים: ABC, ABD, CDA, CBD.

שימו לב! כל שרשרת של אותיות שונות נחשבת למילה.

"על מילים ומבנים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 48, שבט תשל"ז
הטכניון, חיפה

ציור פשוט המדגים מבנה זה הוא ריבוע עם שני אלכסונים, שעליו אפשר לזהות את ארבע המילים שמנינו.



בעיה ידועה שנשאלה במאה ה- 19, הידועה בשמו של המתמטיקאי קירקמן, קשורה במערכת כזאת. נפשט כאן בעיה זאת במקצת.

ישנה כיתה של 9 בנות. בנות אלה יוצאות כל יום לטיול. המורה רוצה לסדר שיטיילו בקבוצות של 3, כך שבמשך 4 ימים אף בת לא תטייל עם אף בת אחרת יותר מאשר פעם אחת.
נוכל לראות בעייה זאת כמערכת שבה $p = 9$, $m = 12$, $k = 3$, $r = 4$, $z = 1$.

נסמן את 9 הבנות באותיות A, B, C, D, E, F, G, H, I ועלינו לבנות מערכת של 12 מילים, כל אחת בת 3 אותיות, כך שכל אות תחזור בדיוק 4 פעמים, ואף זוג אותיות לא יחזור יותר מפעם אחת.
פתרון אחד אל הבעיה הוא :

AEI	BGH	CGI	DEG	
ABD	BFI	CDF	DHI	EFH
ACH	BCE			
AFG				

נחזור עתה לבעיה הכללית. ברור שחמשת המשתנים r, k, m, p ו- z אינם בלתי תלויים. למשל נחשב בשתי דרכים את המספר הכולל של כל האותיות במערכת הכללית :
(i) ישנן m מילים, כל מילה בת k אותיות, הרי שהמספר הכולל הוא mk אותיות.
מאידך :
(ii) ישנן p אותיות וכל אות מופיעה r פעמים מכאן שהמספר הכולל של אותיות הוא pr. כלומר, בכל מערכת כזאת קיים $mk = pr$.

קשר נוסף, בלתי תלוי בקודם, הקיים בין המשתנים הוא למשל $z(p-1) = r(k-1)$.
הוכיחו את קיומו של קשר זה.

כתוצאה משני קשרים אלה בין המשתנים, ברור, כי מספיק לקבוע את הערך של שלושה מבין המשתנים, ואז אפשר לחשב את הערך של האחרים. כמובן שיש לבחור את השלושה בצורה כזאת שכל האחרים יהוו גם כן מספרים שלמים.

לבסוף, נסו לפתור את הבעיה המקורית של קירקמן :
בכיתה ישנן 15 בנות. עליהן לצאת כל יום לטיול בשלשות, ערוכות כך, שבמשך 7 ימים כל בת תטייל עם כל בת אחרת בדיוק פעם אחת. כלומר, $p = 15$, $m = 35$, $k = 3$, $r = 7$, $z = 1$.