הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

הנושא: בעיה לחקירה: חלוקת ריבועים

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

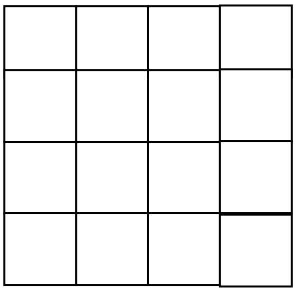
תקציר: בחומר מובאות שתי בעיות הקשורות לספירה: בעיה אחת הקשורה לספירה של מספר הריבועים הנוצרים כאשר מציירים ריבוע של $n \times n$, והשניה קשורה לספירה של מספר הדרכים השונות שניתן לעבור בהן כאשר נוסעים בעיר אמריקאית שבה הרחובות יוצרות ריבועים ואפשר לנוע בהם רק ימינה ולמעלה.

מילות מפתח: קומבינטוריקה, מספר אפשרויות.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 48, טבת תשל"ז
וגליונות לחשבון מס' 49, אייר תשל"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

בעיה לחקירה: חלוקת ריבועים

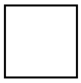


המפתיע במתמטיקה הוא שגם ביחס לצורות הפשוטות ביותר, אם נתעמק בהן נוכל להעלות שאלות מעניינות ומעמיקות. נתעכב תחילה על שאלות הקשורות בספירה ונשאל: כמה ריבועים ישנם בריבוע המצוייר כאן?

התשובה הראשונה העולה על דעתנו היא 16. אבל מחשבה קלה תגלה מייד שאין זה נכון, כי הרי בריבוע זה ישנם גם ריבועים של 2×2 וגם של 3×3.

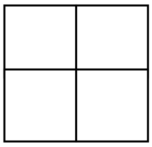
הבה ננסה לכן לספור צעד אחר צעד את מספר הריבועים השונים המתקבלים מריבוע של 1×1, מריבוע של 2×2, מריבוע של 3×3 וכו':

בריבוע של 1×1



ישנו רק ריבוע אחד

בריבוע של 2×2

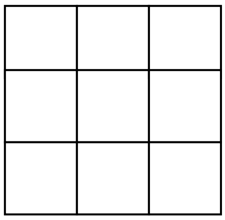


ישנם:

ריבוע אחד שמידותיו 2×2
4 ריבועים שמידותיהם 1×1

סה"כ: $4 + 1$ ריבועים.

בריבוע של 3×3

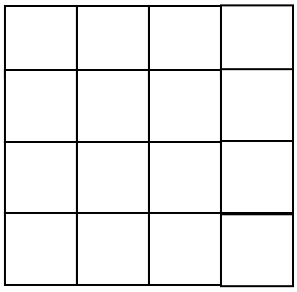


ישנם:

ריבוע אחד שמידותיו 3×3
4 ריבועים שמידותיהם 2×2 (זאת אפשר לראות ע"י כך שבוחרים ריבוע אחד שמידותיו 2×2 בפינה השמאלית למעלה ומזיזים אותו ימינה ולמטה)
9 ריבועים שמידותיהם 1×1

סה"כ: $9 + 4 + 1$ ריבועים.

בריבוע של 4×4



ישנם:

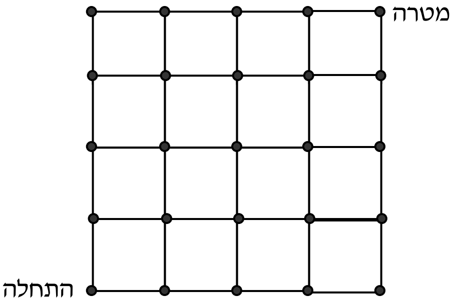
ריבוע אחד שמידותיו 4×4
4 ריבועים שמידותיהם 3×3
9 ריבועים שמידותיהם 2×2
16 ריבועים שמידותיהם 1×1

סה"כ: $16 + 9 + 4 + 1$ ריבועים.

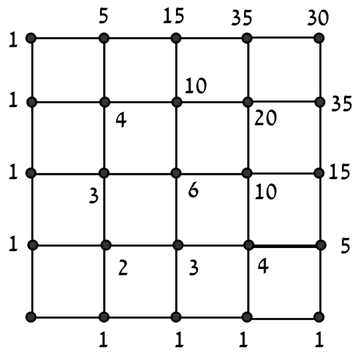
התוכלו לנסח השערה לגבי מספר הריבועים השונים שישנם בריבוע שמידותיו 5×5 ?

"בעיה לחקירה: חלוקת ריבועים", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 48, שבט תשל"ז וגליונות לחשבון מס' 49, אייר תשל"ז
הטכניון, חיפה

נראה עתה את הריבוע שמידותיו 4×4 כמפה של עיר אמריקאית אשר בה כיוון הרחובות הוא אופקי, ממזרח למערב, וכיוון השדרות אנכי, מצפון לדרום. בכל מפגש של רחוב עם שדרה ישנה כיכר.



נהג יוצא מן הכיכר הנמצאת בפינה השמאלית למטה וברצונו להגיע לכיכר אשר בפינה הימנית למעלה.
בכמה דרכים שונות יכול הוא לעשות זאת אם הוא מתקדם רק ימינה ולמעלה ואף פעם לא שמאלה ולמטה?



כדי לענות על שאלה זאת נשים לב שלכל כיכר אפשר להגיע או מכיכר שמתחתיה או מכיכר שמשמאל (אם יש כאלה!). מכאן שמספר הדרכים השונות המובילות לכיכר כלשהי שווה <u>לסכום</u> של מספר הדרכים המובילות לכיכר שמתחתיה ולכיכר שמשמאלה. ברור שלכל אחת מהכיכרות בתחתית הריבוע וכן לאלה שבקצה השמאלי של הריבוע אפשר להגיע רק בדרך אחת – כי – או שאין כיכר מתחתיהן או שאין כיכר משמאלן.
בציור מסומן מספר הדרכים המובילות אליהן, ליד הכיכרות המעניינות אותנו.