הנושא: **ניחוש של סכום הטבעיים ושל סכום הריבועים: בעיה לחקירה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגת דרך למציאת נוסחת הסכום של n מספרים טבעיים החל מ- 1 ושל סכום ריבועים של n מספרים טבעיים החל מ- 1.

מילות מפתח: אלגברה, תבנית מספר, הכללה, סדרות, סדרה חשבונית, אינדוקציה, סכום של סדרת מספרים, מספרים טבעיים, שיטת חקר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 50, תשרי תשל"ח.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

ניחוש של סכום הטבעיים ושל סכום הריבועים: בעיה לחקירה

ישנה דרך מעניינת לנחש כלל שלפיו אפשר לחשב בקלות את הסכום של n מספרים טבעיים עוקבים החל מ-1: $1+2+3+...+n$. נסמן סכום זה ב- $\sum_{1}^{n} k$ (קרא: "<u>סיגמה של k מ-1 עד n</u>").

הכוונה לסכום המתקבל כאשר שמים במקום k את המספרים הטבעיים מ- 1 עד n ומחברים את כולם. למשל $\sum_{1}^{3} k = 1+2+3$, וכן $\sum_{1}^{6} k = 1+2+3+4+5+6$ וכו'.

(הסמל Σ הוא אות יוונית שהצליל שלו דומה לצליל של ס' בעברית).

הבה נערוך טבלה וננסה לגלות תבנית בסכומים:

n	1	2	3	4	5	6
$\sum_{1}^{n} k$	1	3	6	10	15	21

כפי שהדבר נראה עתה קשה לגלות חוקיות בסכומים המתקבלים. אולם ברור שהסכום הזה תלוי ב-n: ככל ש- n יותר גדול, הסכום יהיה יותר גדול.

לפיכך, ייתכן שנקבל תבנית כאשר נחשב את היחס (המנה) בין $\sum_{1}^{n} k$ לבין n. נרחיב את הטבלה:

N	1	2	3	4	5	6
$\sum_{1}^{n} k$	1	3	6	10	15	21
$\frac{\sum_{1}^{n} k}{n}$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{3}=2$	$\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$	$\frac{15}{3}=3$	$\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

נראה שמסתמנת תבנית שבמכנה של כל שבר מופיע המספר 2. עלינו עוד להתגבר על התוצאות שהן מספרים שלמים: 1, 2, 3. נכתוב גם אותן עם מכנה 2: $1=\frac{2}{2}$, $2=\frac{4}{2}$, $3=\frac{6}{2}$.

קיבלנו סדרה של שברים $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{7}{2}$. עתה התמונה מתבהרת.

קל לנסח <u>את ההשערה</u> כי: $\frac{\sum_{1}^{n} k}{n} = \frac{n+1}{2}$ (שימו לב! סדרת המונים מתחילה ב-2)

ומכאן, אם השערתו נכונה, נקבל $\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

כאשר מצליחים לנסח השערה יש לבדוק אותה במספר דוגמאות נוספות, כדי לראות האם אלה יתמכו בהשערה.

"ניחוש של סכום הטבעיים ושל סכום הריבועים: בעיה לחקירה", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 50, תשרי תשל"ח
הטכניון, חיפה

נחשב: $\sum_{1}^{7} k = \sum_{1}^{6} k + 7 = 21 + 7 = 28$, והמנה תהיה $\frac{\sum_{1}^{7} k}{7} = \frac{28}{7} = 4 = \frac{8}{2}$. התוצאה מתאימה להשערה.

נבדוק עתה סכום של שמונה מספרים $\sum_{1}^{8} k = \sum_{1}^{7} k + 8 = 28 + 8 = 36$

והמנה תהיה $\frac{9}{2} = \frac{36}{8}$. שוב בסדר!

אולם נזכור שדוגמאות אלו עדיין אינן הוכחה! כדי להוכיח שהנוסחה $\sum_{1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ נכונה <u>לכל</u> מספר טבעי n, עלינו להשתמש בשיטת הוכחה הנקראת <u>אינדוקציה מתמטית</u>.

עתה, הניחו שאומנם ההשערה נכונה כל n ונסו להשתמש בדרך דומה לנ"ל כדי לנחש נוסחה עבור $\sum_{1}^{n} k^2$ כלומר, הסכום של $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

הכינו טבלה דומה לנ"ל, חשבו את היחסים ונסו לגלות תבנית.

רמז! אם לא תצליחו לגלות תבנית ביחס $\frac{\sum_{1}^{n} k^2}{n}$ נסו לבדוק מה מקבלים מן המנה $\frac{\sum_{1}^{n} k^2}{\sum_{1}^{n} k}$.