הנושא: **תגלית מעניינת**

הוכן ע״י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגת התכונה שכל ריבוע של מספר אי-זוגי, שאינו מתחלק ב- 3, נותן שארית 1 בחילוק ב- 24. מובאת הוכחה לתכונה זו.

מילות מפתח: תורת המספרים, מספרים טבעיים, מספר אי זוגי, חזקות, מספר בריבוע, התחלקות, שארית.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס׳ 51, טבת תשל״ז.
גליונות לחשבון מס׳ 52, אדר ב׳ תשל״ח.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

תגלית מעניינת

קחו מספר אי-זוגי כלשהו גדול מ- 1 שאיננו מתחלק ב- 3. העלו מספר זה בריבוע.
אם תחלקו מספר זה ב- 24 תקבלו תמיד שארית 1. הבה נבדוק מקרים אחדים:

$5^2 = 25$ והנה $25 = 1\times24+1$;

$7^2 = 49$ והנה $49 = 2\times24+1$;

9^2 איננו מתאים כי הוא מתחלק ב- 3.

$11^2 = 121$ והנה $121 = 5\times24+1$;

$13^2 = 169$ וגם כאן $169 = 7\times24+1$.

אמנם דוגמאות אלה מחזקות את ההשערה שהמשפט נכון אבל זו איננה הוכחה.
להלן מספר רמזים להוכחה:

א. $24=3\times8$

ב. נסו להוכיח כי הריבוע של **כל** מספר אי-זוגי שאיננו מתחלק ב- 3 נותן שארית 1 בחילוק ב- 3 ובחילוק ב- 8, השתמשו לשם כך בביטוי $(a + b)^2$.

<u>*פתרון*</u>:

אם מספר איננו מתחלק ב- 3 צורתו או $3k+1$ או $3k+2$.
כל ריבוע של מספר טבעי, אשר איננו מתחלק ב- 3, נותן שארית 1 בחילוק ב- 24 כי:

$$(3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) +1$$

$$(3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) +1$$

וקיבלנו שכל מספר טבעי אשר איננו מתחלק ב- 3, הריבוע שלו נותן שארית 1 בחילוק ב- 3.

מספר אי-זוגי, בחילוק ב- 8, נותן אחת השאריות 1, 3, 5 או 7. כלומר, כל מספר כזה הוא מאחת הצורות $8k+1$, או $8k+3$, או $8k+5$, או $8k+7$.
נסו להוכיח, שכל ריבוע של מספר כזה, נותן שארית 1 בחילוק ב- 8.
עתה, על סמך מה שהוכחנו קודם, אפשר להוכיח שהריבוע של <u>כל</u> מספר אי-זוגי נותן שארית 1 בחילוק ב- $24=8\times3$.

"תגלית מעניינת", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 51, טבת תשל"ז וגליונות לחשבון מס' 52, אדר ב' תשל"ח
הטכניון, חיפה