הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

הנושא: **חקור בעצמך**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאת בעית חקירה הקשורה למציאת כל המלבנים אשר המספר המבטא את היקפם שווה למספר המבטא את שטחם. בעיה זו שקולה למציאת כל האפשרויות להצגת שבר יחידה כסכום של שני שברי יחידה.

מילות מפתח: חשבון, מספרים רציונליים , שברים, שברי יחידה, הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, מלבן, מדידות, היקף, שטח, שיטת חקר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 51, טבת תשל"ז,
גליונות לחשבון מס' 52, אדר ב' תשל"ח.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

חקור בעצמך

נניח שאנו מעונינים למצוא את כל המלבנים אשר המספר המבטא את היקפם שווה למספר המבטא את שטחם.

נוכל לעשות זאת בדרך הבאה:

נניח שמידות המלבן הן a יחידות ו- b יחידות.

שטח המלבן ab יחידות שטח.

היקף המלבן $(a + b) + (a + b) = 2(a + b)$

לכן, לפי תנאי הבעיה, אנו מחפשים a ו- b כך ש $ab = 2(a + b)$.

כדאי לבטא אחד המשתנים בעזרת השני, כי אז נציב ערכים במקום האחד ונוכל מייד לחשב את ערכו של השני.

במקרה זה: $ab - 2b = 2a$ ולכן $b(a - 2) = 2a$ ומכאן אם $a \neq 2$ אז $b = \frac{2a}{a-2}$.

תוצאה זאת אומרת לנו שעבור כל a פרט ל- $a = 2$ נוכל למצוא b מתאים כך שמידת ההיקף תהיה באמת שווה למידת השטח.

נניח עתה שאנו קובעים מגבלה נוספת ודורשים שהמידות a ו- b יהיו מספרים טבעיים.

במקרה זה ייתכן וכדאי להציג את הקשר בין a ו- b בצורה קצת שונה. נחזור ל- $ab = 2a + 2b$.

נחלק שני האגפים ב- ab ונקבל $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$.

חילוק שני האגפים ב- 2 נותן לנו $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

כלומר, ה- a וה- b שאנו מחפשים מקיימים גם את התכונה שבעזרתם אפשר להפריד את השבר $\frac{1}{2}$ לסכום שני שברי יחידה: שברים שהמונה שלהם 1 והמכנה מספר טבעי.

ברור שהפרדה אחת היא $a = b = 4$ כלומר $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

בבעיה שלנו זה אומר שאפשר לבחור מלבן ששטחו: 16 סמ"ר = 4 × 4 סמ"ר, והיקפו: 16 ס"מ.

דברים נוספים לחקירה:

א. היש עוד מלבנים המקיימים את התנאים הדרושים? התוכלו לגלות את <u>כל</u> המלבנים האלה ולהוכיח שאין יותר?

ב. נכליל את הבעיה ונשאל באופן כללי: <u>מה אפשר להגיד על האפשרויות</u> להציג שבר $\frac{1}{n}$ (n מספר טבעי), כסכום של שני שברי יחידה: שברים שמוניהם 1 ומכניהם מספרים טבעיים? כלומר, יש לחקור את האפשרויות לכתוב את $\frac{1}{n}$ כסכום $\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$ כאשר n, a ו- b הם מספרים טבעיים.

שבר שהמונה שלו 1 נקרא **שבר יחידה** או **שבר מצרי**.

<u>פתרון</u>:

"חקור בעצמך", שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 51, טבת תשל"ז וגליונות לחשבון מס' 52, אדר ב' תשל"ח
הטכניון, חיפה

נניח שקיים פתרון $\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, a ו- b מספרים טבעיים. ברור שגם a וגם b גדולים מ- n. נניח לכן

$a = n + p$, $b = n + q$. נקבל: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n+q}=\frac{n+q+n+p}{(n+p)(n+q)}=\frac{2n+p+q}{(n+p)(n+q)}$

ומכאן: $(n+p)(n+q)=n(2n+p+q)$

נפתח סוגריים ונחסיר ביטויים שווים משני האגפים ונקבל $n^2 = pq$.

מאידך, כל הצעדים שעשינו פה ניתנים גם לביצוע בכיוון ההפוך. כלומר, אם נבחר q, p טבעיים,

כך ש- $n^2 = pq$, נקבל תמיד הפרדה של $\frac{1}{n}$ לסכום של שני שברים מצריים.

לדוגמה, אם n ראשוני, הרי אז הפירוקים היחידים של n^2 הם $n^2 = n \times n = 1 \times n^2$ כלומר

במקרה זה ישנם שני פתרונות בלבד והם $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+n^2}=\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n+n}$ כלומר, $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$

וכן $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$.