

הנושא: מספרים במעגל

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגות התכונות של השברים המחזוריים: $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}$ ועוד. התכונות מתייחסות

לספרות שמהן מורכב השבר העשרוני המחזורי.

מילות מפתח: פעולות חשבון, מספרים רציונליים, שברים, שבר מחזורי, כפל.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 51, טבת תש"ז,

גליונות לחשבון מס' 52, אדר ב' תש"ח.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

מספרים במעגל

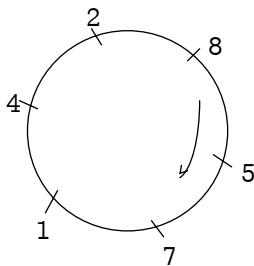
בהפיכת השבר $\frac{1}{7}$ לשבר עשרוני אנו מקבלים שבר מחזורי $0.\dot{1}42857$. הנקודות שמעל לספרות מראות כי זהו המחזור, כלומר, השבר $\frac{1}{7}$ נהפך לשבר עשרוני מחזורי שבו מספר זה יחזור כל הזמן אם נמשיך בחילוק. קל לזכור מחזור זה לפי החרוזים הבאים:

שבע פעמים
 ושוב פי שניים
 ועוד פעם כפליים
 ואחד למזל

$$\begin{aligned} \text{הכוונה: } 7 \times 2 &= 14 && \text{אלה שתי הספרות הראשונות} \\ 14 \times 2 &= 28 && \text{אלה שתי הספרות הבאות} \\ 28 \times 2 + 1 &= 57 && \text{אלה שתי הספרות האחרונות} \end{aligned}$$

למספר 142857 יש תכונה מעניינת: אם נכפול אותו באחד המספרים 2, 3, 4, 5 ו-6 נקבל בכל פעם מספר המורכב מאותן ספרות, תוך שמירה על כך שספרות עוקבות נשארות שכנות - כאשר הספרה הראשונה עוקבת אחרי הספרה האחרונה. כלומר, התוצאה המתקבלת בכל מכפלה היא כאילו היו הספרות רשומות על מעגל ובכל פעם הננו מתחילים לקרוא מסיפרא אחת.

$$\begin{aligned} 2 \times 142857 &= 285714 && \text{כך} \\ 3 \times 142857 &= 428571 \\ 4 \times 142857 &= 571428 \\ 5 \times 142857 &= 714285 \\ 6 \times 142857 &= 857142 \end{aligned}$$



כאשר נכפול מספר זה ב-7 נקבל את המספר 999999.

תוכלו להסביר מדוע זה כך אם תחשבו את המחזורים של $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ וכי.

כמו כן עליכם לשים לב כי השבר המחזורי 0.9 שבו הסיפרא 9 היא המחזור שווה למספר 1, כי בכל מקום שתעגלו שבר זה נקבל 1.

מספר מעגלי דומה מתקבל מכל שבר $\frac{1}{p}$ אשר בתיאורו כשבר עשרוני מקבלים מחזור שאורכו

p-1.

למשל $\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$ שבמחזורו ישנן שש עשרה ספרות.

גם כאן בכפל ב- 2, 3, 4, ..., 16 מקבלים מספר המורכב מאותן ספרות, לפי אותה עריכה, בהתחשב בכך שהספרה הראשונה עוקבת לספרה האחרונה.

$$2 \times 0.0588235294117647 = 0.1176470588235294$$

מאידיך בכפל ב- 17 מקבלים מספר המורכב משש עשרה תשיעיות.

נסו לחקור בעצמכם את השבר המחזורי המתקבל מ- $\frac{1}{19}$ והיווכחו שגם כאן המחזור יוצר מספר מעגלי.

תוצאות קצת שונות אבל מעניינות ביותר נותן השבר המחזורי המתקבל מ- $\frac{1}{13}$ אשר במחזורו

ישנן רק שש ספרות. כאן כדאי לחקור בנפרד את המחזור המתקבל מ- $\frac{1}{13}$ ובנפרד את המחזור

המתקבל מ- $\frac{2}{13}$.

פתרון:

$$\frac{1}{13} = 0.076923, \text{ אולם } \frac{2}{13} = 0.153846$$

כאשר מחשבים $\frac{3}{13}, \frac{4}{13}$, וכו' מקבלים מדי פעם את הספרות של אחד משני המחזורים האלה, כאילו היו כתובות במעגל.