

הנושא: **דיופנטוס ופרמה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאת סקירה הסטורית על תרומתם של המתמטיקאים דיופנטוס ופרמה לתורת המספרים.

מילות מפתח: היסטוריה של המתמטיקה, פרמה, דיופנטוס, תורת המספרים, אלגברה, פתרון משוואות, משוואה דיופנטית, משפט פרמה, חזקות.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 53, אייר תשל"ח.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

דיופנטוס ופרמה

השוליים לא היו מספיקים רחבים

דיופנטוס היה מתמטיקאי יווני שחי, כנראה, במאה השלישית לספירה. הוא היחיד בין המתמטיקאים היוונים אשר כל יצירתו היא באלגברה ובחשבון ולא בגיאומטריה. אנו יודעים מעט מאוד על חייו הפרטיים, פרט לכך שהוא חי באלכסנדריה של מצרים, שהיתה אז מרכז התרבות של העולם העתיק. הספר הידוע ביותר שהוא כתב הוא ספר בשם *Arithmetica*, שהכיל כנראה 14 חלקים, אך רק שישה מהם הגיעו לידינו. ספרים אלה עוסקים בעיקר בבעיות אשר בהן יש למצוא מספרים רציונליים, כלומר מספרים שלמים, או שברים, שהמונה והמכנה שלהם שלם (כמובן שהמכנה שונה מאפס), המקיימים תנאים מסויימים. לדוגמה: למצוא שלושה מספרים רציונליים אשר סכום שלושתם הוא ריבוע וגם הסכום של כל שניים מהם הוא ריבוע. בלשון האלגברה, יש למצוא מספרים רציונליים x, y, z המקיימים:

$$x + y + z = k^2, \quad x + y = m^2, \quad x + z = r^2, \quad y + z = p^2$$

כאשר גם r, p, m, k הם מספרים רציונליים.

הבעיה העיקרית בקשר לפתרון משוואות אלה היא שיש יותר משתנים ממשוואות. לכן, יש בדרך כלל אין סוף פתרונות. אלא שמחפשים פתרונות המקיימים תנאים מסויימים, כגון להיות מספר רציונלי. לכבודו של דיופנטוס מכנים עד היום משוואות שמטילים עליהן אילוצים דומים בשם **משוואות דיופנטיות**.

במאה ה-17 תורגם ללטינית הספר של דיופנטוס ומתמטיקאי צרפתי בשם פרמה (Pierre de Fermat, 1601-1665, אין מבטאים את ה-t הסופית) רכש את הספר. בשעת קריאת הספר נהג פרמה לרשום בשוליים הערות שונות לבעיות שפרמה דן בהן. הערות אלה נתגלו כמעט כולן כמשפטים חשובים ונכונים בתורה זאת. והנה באחד העמודים בספר עוסק דיופנטוס בבעיה של משפט פיתגורס ומפתח דרך לבניית משולשים ישרי זווית, אשר מידות האורך של צלעותיהם הן מספרים רציונליים. בקוראו על הבעיה זאת רשם פרמה בשולי הספר:

"עם זאת אי אפשר לרשום חזקה שלישית כסכום שתי חזקות שלישיות (של מספרים רציונליים) או חזקה רביעית כסכום שתי חזקות רביעיות, או באופן כללי חזקה עם מעריך שלם גדול מ-2 כסכום שתי חזקות עם אותו מעריך. גיליתי דרך מופלאה להוכיח זאת אלא שהשוליים צרים מדי".

זה משפט מפורסם שמכנים אותו בשם המשפט הגדול של פרמה. בלשון אלגברית, פרמה טוען שלא קיים פתרון בתחום של המספרים השלמים למשוואה $x^n + y^n = z^n$, כאשר $n > 2$ מספר שלם.

נסו את כוחכם בהוכחת משפט אחר שפרמה הוכיח: מספר ראשוני אי-זוגי, גדול מ-3, יכול לתת בחילוק ב-3 או שארית 1, או שארית 2. חיקרו אילו מספרים משני סוגים אלה אי אפשר לכתוב כסכום שני ריבועים. נמקו דבריכם.