

הנושא: **על בעיה פתוחה במשפט פיתגורס**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

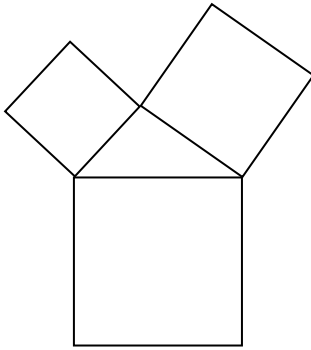
תקציר: בחומר מובאת סקירה על משפט פיתגורס ומשמעותו, שלשות מספרים פיתגוריות וכיצד בונים שלשה פיתגורית משני מספרים נתונים. נשאלות שתי שאלות הקשורות לגופים במרחב ולשלשות פיתגוריות.

מילות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטריית המישור, משולש ישר זווית, משפט פיתגורס, הנדסת המרחב, גיאומטריית המרחב, תיבה, תבנית מספר, שלשה פיתגורית, נוסחאות הכפל המקוצר.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 55, טבת תשל"ט.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

על בעיה פתוחה במשפט פיתגורס



משפט פיתגורס דן במשולשים ישרי זווית ומבטיח לנו שבכל משולש כזה סכום שטחי הריבועים הבנויים על שתי הצלעות המאונכות שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.

בשפה אחרת:

מידות האורך של שלוש הצלעות של כל משולש ישר זווית יש להן התכונה שסכום הריבועים של שתיים מהן שווה לריבוע של השלישית.

כולנו מכירים שלשות של מספרים טבעיים המקיימות דרישה זאת:

למשל 3, 4, 5 ; 5, 12, 13 ; 15, 8, 17 ; 7, 24, 25 ועוד.

כלומר כל שלשה כזאת יכולה לתאר את מידות האורך של הצלעות במשולש ישר זווית.

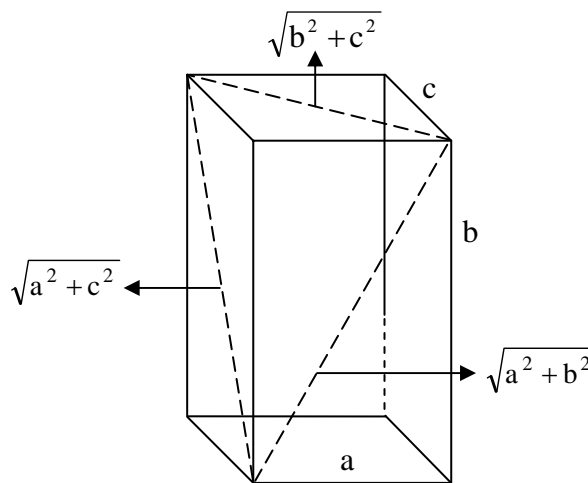
הוכיחו, כי אם בוחרים שני מספרים טבעיים כלשהם m ו- n , כך ש- $m > n$ ובונים מהם שלושה

מספרים חדשים x, y, z , $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = n^2 + m^2$, הרי תמיד $x^2 + y^2 = z^2$.

שלשה כזאת של מספרים x, y, z נקראת שלשה פיתגורית.

הנה שאלה מעניינת:

האם תיתכן תיבה שמידותיה $a \times b \times c$ (א, b ו-c מספרים טבעיים) כך שלמידות אלה תהיה גם התכונה שסכום הריבועים של כל שתיים מהן יהיה שוב ריבוע של מספר שלם? הפירוש הגיאומטרי של שאלה זאת הוא: האם אפשר לבנות תיבה שמידות אורכה, רוחבה וגובהה יהיו מספרים שלמים וגם כל מידות האלכסונים של פאותיה יהיו מספרים שלמים? כלומר אנו רוצים שכל אחד מהסכומים $a^2 + b^2$, $a^2 + c^2$, $b^2 + c^2$ יהיה ריבוע של מספר טבעי.



מתברר שזה כלל לא קשה. מכל שלשה x, y, z המקיימת את משפט פיתגורס, אפשר לבנות שלשה חדשה a, b, c המקיימת את הדרוש.

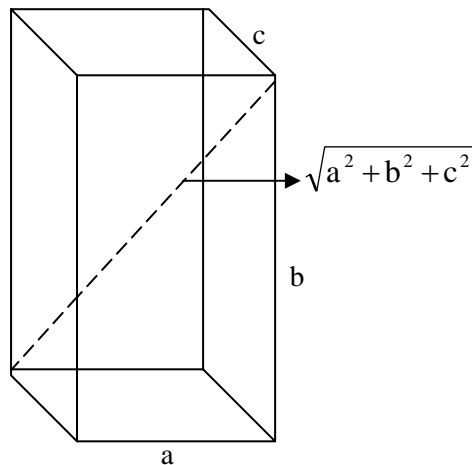
$$\text{צריך רק לבחור: } a = x(4y^2 - z^2) \quad b = y(4x^2 - z^2) \quad \text{ו-} \quad c = 4xyz$$

הוכיחו כי אמנם a, b, c מקיימים את הדרוש (שימו לב! בהוכחה צריך להשתמש בעובדה ש- $x^2 + y^2 = z^2$).

חשבו איזו שלשה a, b, c מתקבלת מן השלשה $(x, y, z) = (3, 4, 5)$.

והנה דבר מפתיע. טבעי לשאול, האם אפשר למצוא שלשה a, b, c של מספרים טבעיים שלא רק $a^2 + b^2 + c^2$, $a^2 + c^2$, $a^2 + b^2$ יהיו ריבועים של מספרים טבעיים, אלא שגם הסכום $a^2 + b^2 + c^2$ יהיה מספר טבעי?

בדוגמה הגיאומטרית פירוש הדבר שאנו מחפשים תיבה, שמידות אורכה, רוחבה, וגובהה יהיו מספרים טבעיים, מידות כל האלכסונים של פאותיה יהיו מספרים טבעיים, וגם מידות האלכסונים הפנימיים שלה יהיו מספרים טבעיים.



שאלה זאת טרם נפתרה. כלומר, לא הצליחו למצוא שלשה a, b, c כזאת ולא ידוע אם שלשה כזאת בכלל קיימת.