

הנושא: **שאלות מתוך התחרות במתמטיקה לתלמידי חט"ב תשל"ו**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאות 5 שאלות מתוך תחרות מתמטיקה בנושאים שונים: ערך מוחלט, פעולה בינארית בין מספרים חיוביים, ערך שלם של מספר, סדרה, שוויון פונקציות. מצורפים פתרונות לבעיות.

מילות מפתח: תחרות, אלגברה, ערך מוחלט, חזקות, ערך שלם, פונקציה, סדרה, סדרות, הגדרה רקורסיבית.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 55, טבת תשל"ט.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 2 עמודים.

שאלות מתוך התחרות במתמטיקה לתלמידי חט"ב תשל"ו

1. בשביל אלו ערכים של x קיים $\frac{|x - |x||}{x} > 0$?

- (א) לכל $x \neq 0$ (ב) רק ל- $x > 0$ (ג) רק ל- $x < 0$
(ד) למספר סופי של ערכי x (ה) אף אחת מהתשובות הנ"ל אינה נכונה

2. אם נתונה קבוצה של מספרים ובין כל שני מספרים מהקבוצה מוגדרת פעולה, הנותנת כתוצאה שוב איבר מן הקבוצה, אנו מכנים פעולה זאת בשם פעולה בינארית. לדוגמה חיבור, חיסור, כפל, ... המוגדרים בין המספרים הממשיים, הן פעולות בינאריות.

הפעולה הבינארית $a \circ b = a^b$ מוגדרת לכל שני מספרים חיוביים a ו- b . (הוא סימן הפעולה). איזו מן התכונות הבאות נכונה לכל a, b, c, n חיוביים:

- (א) $a \circ b = b \circ a$ (ב) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
(ג) $a \circ b^n = (a \circ n) \circ b$ (ד) $(a \cdot b)^n = a \circ (bn)$ (ה) אף אחת מהתשובות איננה נכונה

3. נגדיר את הסמל $[x]$ כערך השלם הכלול במספר x , כלומר המספר השלם הגדול ביותר

שאינו גדול מ- x . למשל: $[5]=5$, $[1.2]=1$, $[-2.3]=-3$, $[\sqrt{3}]=1$ וכדומה.

אילו מבין החוקים הבאים יהיו נכונים לכל x ולכל y ?

I. $[x+1]=[x]+1$

II. $[x+y]=[x]+[y]$

III. $[xy]=[x] \cdot [y]$

- (א) רק I (ב) רק I ו-II (ג) רק III
(ד) כל שלושת החוקים (ה) אף אחד מן החוקים

4. נתונה סדרה של מספרים שלמים המוגדרת כדלקמן:
 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ שלם $n > 2$ ולכל $a_2 = 3, a_1 = 1$
האיברים הראשונים בסדרה זאת אם כן (מימין לשמאל):
 $2-3=-1, 3-1=2, 3, 1$ וכיו.
מהו הסכום של 100 האיברים הראשונים בסדרה זאת?
(א) -1 (ב) 1 (ג) 2 (ד) 4 (ה) 5

5. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל המספרים השלמים כדלקמן:
לכל x זוגי $f(x) = x$, לכל x אי זוגי $f(x) = x+1$. נתון $f(x) = f(y)$.
מה יכולים להיות הערכים של $x-y$:
(א) רק 0 (ב) -1 או 0 (ג) -1 או 1
(ד) -1 או 0 (ה) -2, -1, 0 או 1
(א) 0 או 1 (ב) -1 או 0 (ג) 0 או 1

פתרונות:

1. התשובה היא ה' כי $\frac{|x - |x||}{x}$ אף פעם לא יהיה חיובי. אם x חיובי, ערך השבר 0; אם x שלילי המונה חיובי והמנה שלילית. לכן ערך השבר שלילי.
2. התשובה היא ד' כי $(a \circ b)^n = (a^b)^n = a^{bn} = a \circ (bn)$
3. התשובה היא א' כי הוספת 1 מגדילה את השלם והחלק השברי בין כך נופל.
למשל $\left[2\frac{1}{3} + 1\right] = \left[3\frac{1}{3}\right] = 3 = \left[2\frac{1}{3}\right] + 1$
4. התשובה היא ה' כי הסדרה המתקבלת היא $1, 2, 3, 1, -1, -3, -2, 1, 3, 2, \dots$
כלומר, כל שישה איברים הסדרה חוזרת על עצמה. הואיל ו- $16 = 96:6$ יהיו עד לאיבר ה- 96 שישה עשר מחזורים שלמים. סכום המספרים בכל מחזור הוא 0. הרי שיוותרו ארבעה איברים והם 1, 2, 3, -1 שסכומם 5.
5. התשובה היא ד' אם שני המספרים x ו- y שווים הרי אז $x - y = 0$. ואם הם אינם שווים הרי כדי שיהיה $f(x) = f(y)$ הכרחי ששני המספרים x ו- y יהיו שכנים כאשר הקטן מביניהם אי זוגי. למשל $x = 3$ ו- $y = 4$ כי אז $f(3) = 3 + 1 = 4, f(4) = 4$
אבל אז $x - y = -1$ ואם $x = 4, y = 3$ נקבל $x - y = 1$.