

הנושא: **הבעייה של קירקמן על 15 תלמידות בי"ס**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאות בעיות הקשורות לסידור של מספר אנשים בקבוצות (זוגות, שלשות), כך שבכל פעם מתחלף הסידור של הקבוצות, על-פי תנאים נתונים. מצורף פתרון גיאומטרי לאחת מן הבעיות.

מילות מפתח: קומבינטוריקה, מספר אפשרויות, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, מעגל.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 56, אדר תשל"ט.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

הבעייה של קירקמן על 15 תלמידות ביי"ס

בשנת 1850 פירסם המתמטיקאי T. P. Kirkman את הבעייה הבאה באחד העיתונים האנגליים :
 באחת הפנימיות לבנות גרות 15 בנות. הן יוצאות לטיול היומי בשלוש (זה היה
 הנוהג המקובל באנגליה במאה ה-19). כיצד אפשר לערוך את השלוש, כך שכל
 תלמידה תטייל, בדיוק פעם אחת בשבוע, בשלושה אחת עם כל תלמידה אחרת?

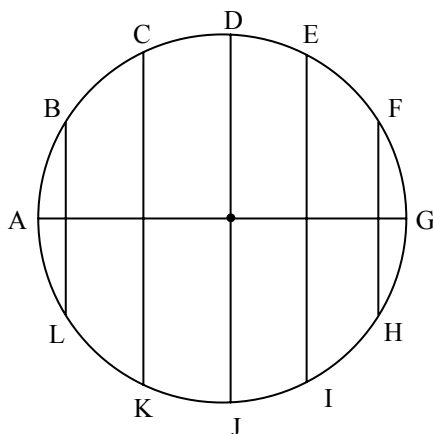
נוכל לתרגם שאלה זאת לצורה המתמטית הבאה :
 כיצד אפשר לערוך 15 עצמים A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O בשבע עמודות של חמש
 שלשות כל אחת, כך ש :

- (i) בכל עמודה יופיעו חמש שלשות של העצמים.
- (ii) עצם יופיע בעמודה כזאת בדיוק פעם אחת.
- (iii) כל זוג איברים יופיע בדיוק פעם אחת בכל העמודות.

נוכל לתאר בעייה זאת גם בדרך גיאומטרית :

- (i) נתונות 15 נקודות (כל בת מסומנת ע"י נקודה).
 - (ii) עלינו לחבר כל 3 נקודות ע"י קו ישר או עקום (כל קוו כזה מתאר שלשה של בנות המטיילות יחד).
 - (iii) כל נקודה צריכה להימצא על שבע קווים בדיוק. (כל בת מטיילת בכל אחד מימות השבוע עם שתי בנות).
 - (iv) דרך כל שתי נקודות עובר קו אחד ולא יותר (כל בת מטיילת פעם אחת במשך השבוע עם כל בת אחרת).
- מובן שאפשר לשאול שאלות דומות גם למספרים אחרים, שונים מ-15, של עצמים, ולעריכה אחרת של הקבוצות.

להלן דרך פתרון פשוט הן למקרה שיש מספר זוגי של בנות, והטיול נערך בזוגות. אף בת איננה רשאית לטייל פעם שנייה עם אותה בת-זוג, עד שלא טיילה עם כל אחת מהבנות.



פתרון גיאומטרי פשוט למקרה זה הוא כדלקמן : יהיה מספר הבנות $2n$. מצירים מעגל ומחלקים אותו ל- $2n - 1$ חלקים שווים. המרכז וכל נקודות החלוקה מסמנים את $2n$ הבנות. מחברים בקוטר את המרכז עם נקודה אחת : זה זוג ראשון. מורידים אנך לקוטר מכל נקודת חלוקה וממשיכים אותו. אנך זה פוגע בנקודה חלוקה שנייה. כך מקבלים את $2n - 1$ הזוגות האחרות. זאת העריכה ליום הראשון. בכדי לקבוע את העריכה ליום הבא מסובבים את הקוטר שיפגע בנקודה B וחוזרים על כל התהליך וכו'.

הציור נותן את הפתרון ליום אחד במקרה שישנן 12 בנות. נסו לפתח שיטה לפתרון הבעייה המקורית של קירקמן.