הנושא: **מדוע כפל באפס נותן תמיד אפס?**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מובאת הוכחה לכך שכפל של מספר באפס הוא תמיד אפס. הוכחה זו מסתמכת על תכונות של שדה אלגברי.

מילות מפתח: שדה אלגברי, מספרים ממשיים, פעולות חשבון, חיבור, כפל, חוק הקיבוץ, איבר נייטרלי, מספר נגדי, מספר הופכי, חוק הפילוג.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 56, אדר תשל"ט.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

מדוע כפל באפס נותן תמיד אפס?

כולנו תמהים מדוע המכפלה של שני מספרים שליליים היא תמיד מספר חיובי. נוכל להוכיח שעובדה מתמיהָ זאת נובעת מן המשפט הנראה "ברור מאליו" שהמכפלה של מספר כלשהו באפס היא תמיד אפס.

תחילה נוכיח כי הנחות היסוד של התכונות של קבוצת המספרים הממשיים מכריחות אותנו לקבל תכונה זאת של מכפלה באפס כמשפט. נזכור: <u>בקבוצת המספרים הממשיים מוגדרות פעולות החיבור והכפל כך שהסכום והמכפלה של כל שני מספרים ממשיים הם שוב מספרים ממשיים</u>.

אנו מניחים את התכונות הבאות, שהן תכונות של מבנה מתמטי הנקרא <u>שדה אלגברי</u>:

(א) <u>קיימים חוקי הקיבוץ ביחס לחיבור וביחס לכפל</u>.
כלומר: אם נתון סכום של שלושה מספרים $a+b+c$ הרי בין אם נחשב סכום זה בדרך $(a+b)+c$ ובין אם נחשבו בדרך $a+(b+c)$, נקבל תמיד אותה תוצאה.
הוא הדין ביחס לכפל של שלושה מספרים $a\cdot b\cdot c$. הקיבוץ $(a\cdot b)\cdot c$ נותן אותה תוצאה כמו $a\cdot(b\cdot c)$.

(ב) <u>קיים מספר, שאנו מכנים אותו אפס, ומסמנים אותו בסימן "0", שהוא נייטרלי ביחס לחיבור. כן קיים מספר, שאנו מכנים אותו אחת ומסמנים אותו "1" שהוא נייטרלי ביחס לכפל</u>.
כלומר: כל מספר a מקיים: $a+0=0+a=a$;
וכן כל מספר a מקיים: $1\cdot a=a\cdot 1=a$.

(ג) <u>לכל מספר יש מספר נגדי ביחס לחיבור, ולכל מספר שאיננו אפס יש גם הופכי ביחס לכפל</u>.
פירוש הדבר: לכל מספר a קיים מספר שמסמנים אותו $-a$, כך שמתקיים $(-a)+a=a+(-a)=0$. כמו כן, לכל מספר a, <u>שאיננו אפס</u>, קיים מספר שמסמנים אותו $1/a$, כך שמתקיים $(1/a)\cdot a=a\cdot(1/a)=1$.

(ד) <u>קיים חוק המאפשר פילוג של הכפל מעל לחיבור</u>.
כלומר: אם נתון צירוף של כפל וחיבור ביחס לשלושה מספרים בצורה $a\cdot(b+c)$, אפשר לפלג ולבצע בנפרד $ab+ac$.

תכונה (ב) קובעת את <u>תכונת האפס ביחס לפעולת החיבור</u>. על סמך ארבע דרישות אלה נוכיח את <u>תכונת האפס ביחס לכפל</u> והוא: לכל מספר a קיים $a\cdot 0=0$.

(1) על-פי תכונה (ד) אנו יודעים כי $a\cdot(b+0)=ab+a\cdot 0$. מאידך, על סמך תכונה (ב) ידוע כי $a\cdot(b+0)=ab$. מסקנה: $ab+a\cdot 0=ab$.

(2) תכונה (ג) מבטיחה לנו כי ל- ab קיים נגדי ביחס לחיבור והוא $-(ab)$. נתבונן עתה ב- $-ab+(ab)$. לפי תכונה (ג) ערכו אפס.
לפי מה שהישגנו ב- (1) נוכל לרשום גם: $0=-ab+(ab)=-ab+[(ab)+a\cdot 0]$. אבל לפי חוק הקיבוץ של החיבור (תכונה א') אפשר לרשום את אגף ימין גם כך: $[-ab+ab]+a\cdot 0$.
כלומר, $0=[-ab+ab]+a\cdot 0=0+a\cdot 0$.
מכאן ש- $a\cdot 0$ שווה לאפס עבור כל a.
שימו לב: לא הוכחנו ולא השתמשנו בחוק החילוף. אבל תוכלו להוכיח בדרך דומה כי גם $0\cdot a=0$ לכל a ממשי.
נסו להוכיח, על סמך טענה זאת, <u>שכל מכפלה של שני מספרים שליליים נותנת מספר חיובי</u>.

"מדוע כפל באפס נותן תמיד אפס" שמואל אביטל
גליונות לחשבון מס' 56, אדר תשל"ט
הטכניון, חיפה