

אשכול פיננסי וכלכלי – כיתה י"ב - תכנון ליניארי (20 שעות)

תיאור כללי של היחידה

ביחידה זו יכירו התלמידים ענף במתמטיקה שימושית שפותח בשנות הארבעים של המאה העשרים. מטרת ענף מתמטי זה היא למצוא פתרון אופטימלי לבעיות מורכבות בתחומים שונים כגון כלכלה, ניהול, תעשייה, חקלאות תזונה, וכדומה. ביחידה יושם דגש על ההיבט הכלכלי. במציאות, הבעיות מכילות לרוב מספר גדול של משתנים ונהוג לפתור אותן באמצעות מחשבים אך הבעיות שיוצגו ביחידה זו יכילו שני משתנים כך שניתן לענות עליהן באמצעות שיטות גרפיות פשוטות.

ביחידה זו התלמידים ילמדו לזהות משתנים רלוונטיים בסיטואציה כלכלית/פיננסית (או סיטואציה בתחום אחר), לתרגם את מערכת האילוצים למערכת אי-שוויונות, להציג את מערכת אי-השוויונות בדרך גרפית ולהשתמש בהצגה הגרפית ובטכניקה אלגברית פשוטה על מנת למצוא את הפתרון האופטימלי לבעיה.

נושאים מתמטיים שנדרשים כנושאי קדם ליחידה:

- א. קריאה וסימון של נקודות במערכת צירים קרטזית.
- ב. משוואת ישר – משמעות הפרמטרים, סרטוט במערכת צירים קרטזית.
- ג. מציאת נקודת חיתוך של שני ישרים כפתרון מערכת משוואות ליניאריות.

נושאים מתמטיים ביחידה:

- א. פתרון גרפי של אי-שוויונות לינאריים.
- ב. תרגום מייצוג מילולי לייצוג אלגברי – רישום תבנית של פונקציה ממעלה ראשונה בשני משתנים $(f(x,y))$ וחישוב ערכיה בנקודות נבחרות.
- ג. היכרות עם המושגים: מערכת אילוצים, פונקציית מטרה, תחום אפשרי של פונקציית המטרה
- ד. ערך מקסימלי וערך מינימלי של פונקציה בשני משתנים ממעלה ראשונה בתחום אילוצים נתון.

מטרות כלליות ביחידה:

1. התלמידים יכירו סיטואציות מתחומים שונים, ובהם התחום הכלכלי, בהם נדרשת מציאה של ערך אופטימלי של סיטואציה על מנת לקבל החלטה מושכלת הנסמכת על שיקולי כדאיות.
2. התלמידים יבינו את החשיבות של מציאת ערך אופטימלי לסיטואציה נתונה.
3. התלמידים יכירו את השלבים השונים הנדרשים לפתרון בעיה בתכנון ליניארי.
4. התלמידים יבינו את ההקשר בין פתרון השאלה לבין הסיטואציה הנתונה בשאלה.

מטרות אופרטיביות

1. בהינתן סיטואציה כלכלית או פיננסית, המתוארת באופן מילולי, התלמידים ידעו :
 - א. לרשום את מערכת האילוצים של הסיטואציה באמצעות מערכת משוואות ואי-שוויונות ממעלה ראשונה.
 - ב. לרשום את פונקציית המטרה ולקבוע האם הדרישה היא למקסימום או מינימום של פונקציה זו.
 - ג. למצוא את התחום האפשרי באמצעות השלבים הבאים :
 - ג.1. סרטוט של הישרים המתאימים למערכת האילוצים במערכת צירים קרטזית.
 - ג.2. סימון תחום האי-השוויון של כל אחד מהישרים.
 - ג.3. סימון התחום המהווה את הפתרון של מערכת אי השוויונות (התחום האפשרי).

הערה – תלמידים יוכלו להיעזר בתוכנה גרפית המאפשרת סרטוט הישרים וסימון תחומי אי-השוויון לצורך מציאת התחום האפשרי.

 - ד. לחשב, באמצעות טכניקה אלגברית, או באמצעות מחשב, את נקודות החיתוך בין הישרים התוחמים את התחום האפשרי.
 - ה. להציב את שיעורי נקודות החיתוך, שמצאו בסעיף ד, בפונקציית המטרה ולזהות את הנקודה בגרף המתארת את המצב האופטימלי (מינימלי או מקסימלי) על פי הנדרש בשאלה.
- ו. להשיב על שאלות שמצביעות על הבנת הקשר בין פתרון השאלה לבין הסיטואציה הכלכלית-פיננסית הנתונה.
2. בהינתן סיטואציה כלכלית או פיננסית, המתוארת באופן מילולי, ותיאור גרפי של הישרים המהווים את גבולות תחומי האילוצים המתארים את הסיטואציה הנתונה, או תיאור גרפי של התחום האפשרי, התלמידים ידעו :
 - א. לזהות איזה גרף שייך לאיזה אילוץ.
 - ב. לסמן את התחום המתאים לכל אילוץ (אם אינו נתון).
 - ג. לזהות ולסמן את התחום האפשרי (אם אינו נתון).
3. בהינתן סיטואציה כלכלית או פיננסית, המתוארת באופן מילולי, גרפי, בטבלה או שילוב ביניהם, ואשר משולבים בה נתונים פרמטריים, התלמידים ידעו :
 - א. לרשום את מערכת האילוצים ו/או את פונקציית המטרה באמצעות הפרמטרים.
 - ב. לרשום, בהתאם לנתוני השאלה, משוואה ליניארית או מערכת משוואות שהנעלם(ים) פרמטרי(ים) (שני פרמטרים לכל היותר)
 - ג. לפתור את מהשוואה או מערכתה משוואות ולמצוא את ערכי הפרמטרים.

הערות והדגשים :

1. מומלץ להיעזר בתוכנה המאפשרת סרטוט גרפים וסימון תחומי אי שוויון ליניארי.
2. ביחידה זו ישולבו דוגמאות גם מתחומים נוספים מעבר לתחום הפיננסי – כלכלי.

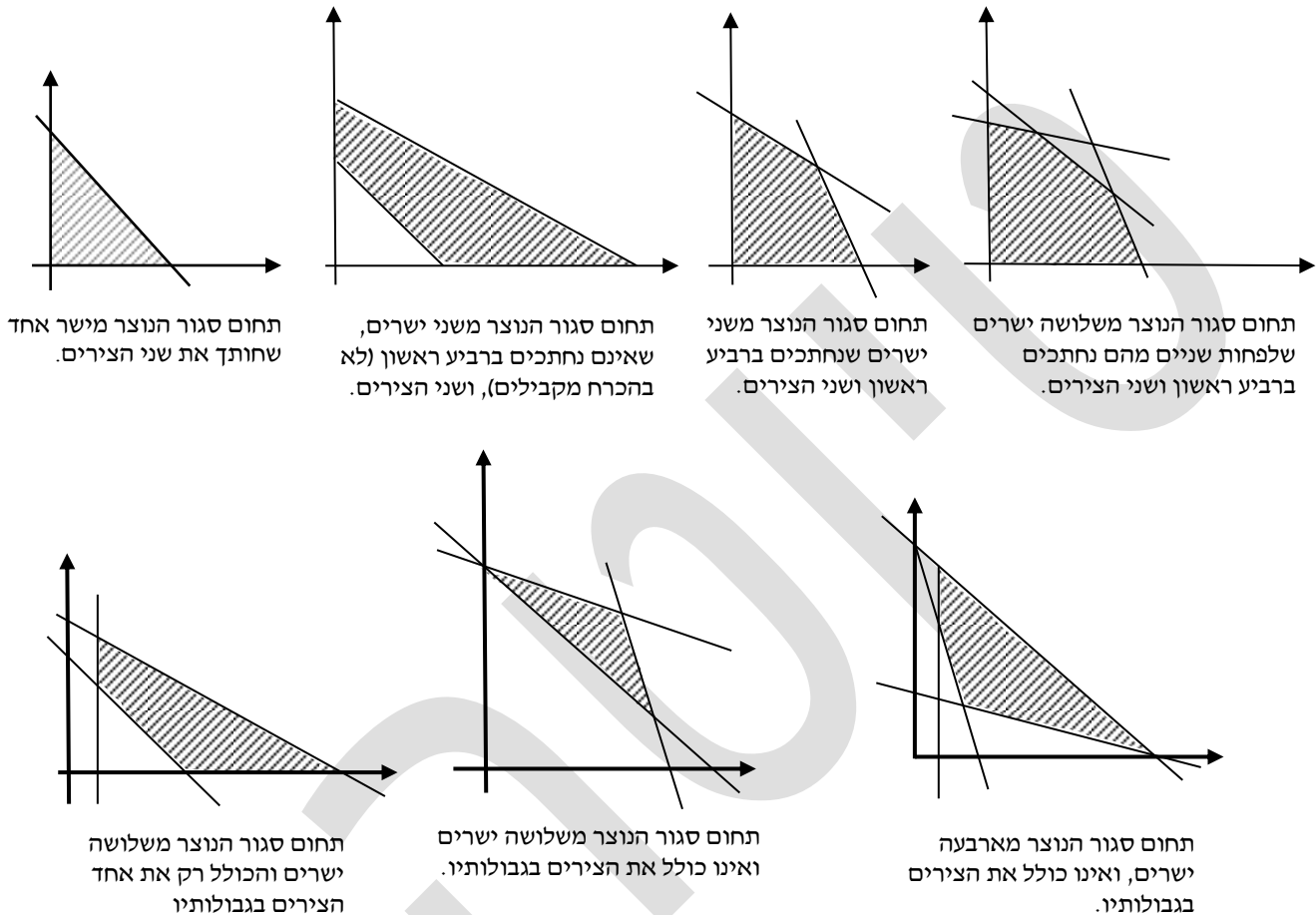
קבוצת דוגמאות תכנון ליניארי

בכל קבוצות הדוגמאות הבאות, מוצגים מצבים אורייניים אשר בהם התלמידים מתבקשים לפתור שאלות בתכנון הליניארי באמצעות שימוש בכלי כתיבה, סרגל ומחשבון ו/או באמצעות תוכנה גרפית מתאימה ולהשיב על שאלות המצביעות על הבנת הסיטואציה המתוארת בשאלה ואילווציה.

קבוצת דוגמאות 1.1

אפיון: השאלות בקבוצת דוגמאות זו מכילות מערכת של 3-5 אילווצים שתיאורם הגרפי נותן **תחום**

אפשרי סגור. דוגמאות לתחומים כאלה:



השאלות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו קשורות לכל השלבים הנדרשים לפתרון שאלה בתכנון

לינארי (מטרה אופטימלית מס' 1) או לחלקם (מטרה אופטימלית מס' 2).

דוגמה

- בנגריה מייצרים שני סוגים של שולחנות : שולחנות כתיבה ושולחנות אוכל.
- ידוע, שביום אחד יכול המפעל לייצר לכל היותר 50 שולחנות.
- הרווח הנקי של הנגרייה לכל שולחן כתיבה הוא 50 שקלים והרווח לכל שולחן אוכל הוא 40 שקלים.
- א. סרטטו את תחום הפתרונות האפשרי למערכת האילוצים של השאלה.
- ב. באחד הימים, לאחר שסיימו לייצר 20 שולחנות כתיבה, ניסה מנהל העבודה לחשב כמה שולחנות כתיבה יהיה עליו לייצר במטרה להרוויח 2,600 ש"ח ביום זה. לאיזו מסקנה הגיע מנהל העבודה?
- ג. סמנו על הגרף את הנקודה (20,10). האם הנקודה נמצאת בתוך התחום האפשרי או מחוץ לו? מה המשמעות של התשובה בהקשר לתוכן השאלה?
- ד. כמה שולחנות מכל סוג על הנגרייה לייצר ביום, כדי שהרווח היומי של הנגרייה יהיה מקסימלי?

דוגמה

- במפעל העובדים מתחלקים לשני סוגים : בעלי תואר אקדמי, חסרי תואר אקדמי.
- משכורתו החודשית (ברוטו) של בעל תואר היא 20,000 שקלים ומשכורתו החודשית (ברוטו) של חסר תואר היא 14,000 שקלים.
- המפעל יכול להעסיק לכל היותר 30 עובדים משני הסוגים יחד.
- התקציב למשכורות החודשיות של המפעל הוא לכל היותר 480,000 שקלים.
- ההכנסה החודשית של המפעל מעבודתו של כל בעל תואר היא 7,000 שקלים וההכנסה החודשית מעבודתו של כל חסר תואר היא 5,500 שקלים.
- א. כמה עובדים מכל סוג כדאי לבעל המפעל להעסיק, כדי שההכנסה החודשית הכוללת תהיה מקסימלית?
- ב. מהי ההכנסה החודשית המקסימלית הכוללת של המפעל?
- ג. באחד החודשים, אחד מבעלי התואר האקדמי היה חולה, ובנו, חסר התואר האקדמאי, החליף אותו.
1. האם המצב החדש תואם למערכת האילוצים? נמקו.
2. האם ההחלפה הייתה משתלמת מנקודת המבט של בעל המפעל? נמקו.

דוגמה

מפעל גדול מייצר שני סוגים של שוקולד: "שוקולד חלב" ו"שוקולד מריר".

הכנת השוקולדים נעשית באמצעות שתי מכונות.

מכונה א - מייצרת את התערובת ממנה עשויים השוקולדים.

מכונה ב - יוצקת את השוקולד בטבליות ואורזת בנייר.

לפניכם נתוני הזמן הדרוש לכל אחת משתי המכונות להכנת 1 ק"ג שוקולד:

- מכונה א מייצרת תערובת ל 1 ק"ג שוקולד חלב ב 15 דקות ותערובת ל 1 ק"ג שוקולד מריר בחצי שעה.

- מכונה ב יוצקת ואורזת 1 ק"ג שוקולד חלב ב 25 דקות ו 1 ק"ג שוקולד מריר ב 20 דקות.

מכונה א יכולה לעבוד ברציפות 2 שעות לכל היותר

מכונה ב יכולה לעבוד ברציפות 3 שעות לכל היותר.

הרווח של המפעל לכל 1 ק"ג שוקולד חלב הוא 10 שקלים והרווח לכל 1 ק"ג שוקולד מריר הוא 12 שקלים.

מהי כמות השוקולד (ביחידות ק"ג) מכל סוג שכדאי למפעל לייצר ביום כדי שהרווח של המפעל ביום יהיה מקסימלי?



תכנון ליניארי - במפעל השוקולד.bgg

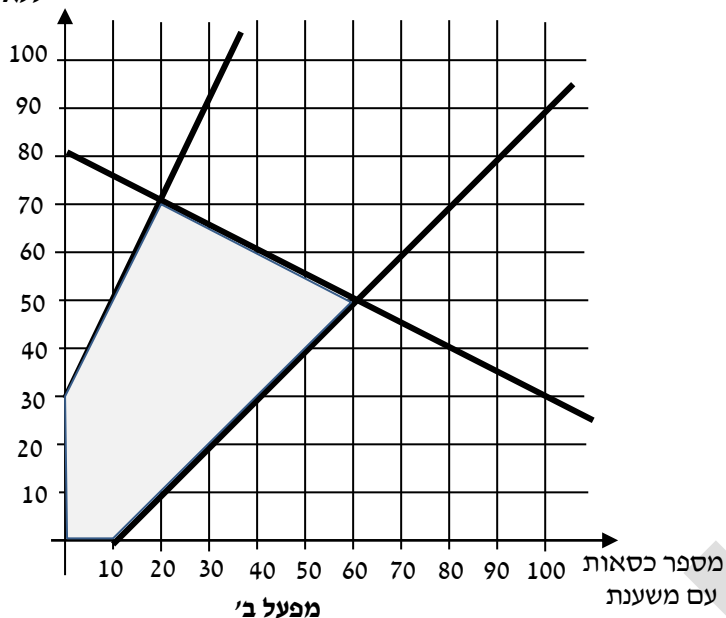
אפשרות לשילוב אמצעי טכנולוגי:

דוגמה

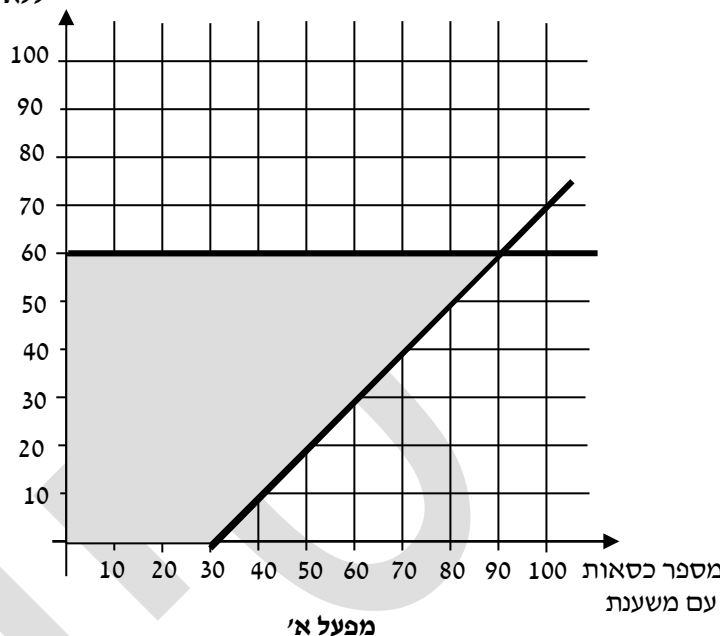
מפעל מייצר שני סוגי כסאות: כסאות עם משענת וכסאות ללא משענת.

המפעל מייצר את הכיסאות בשלושה מפעלי משנה. לפניכם האילוצים של כל אחד מן המפעלים:

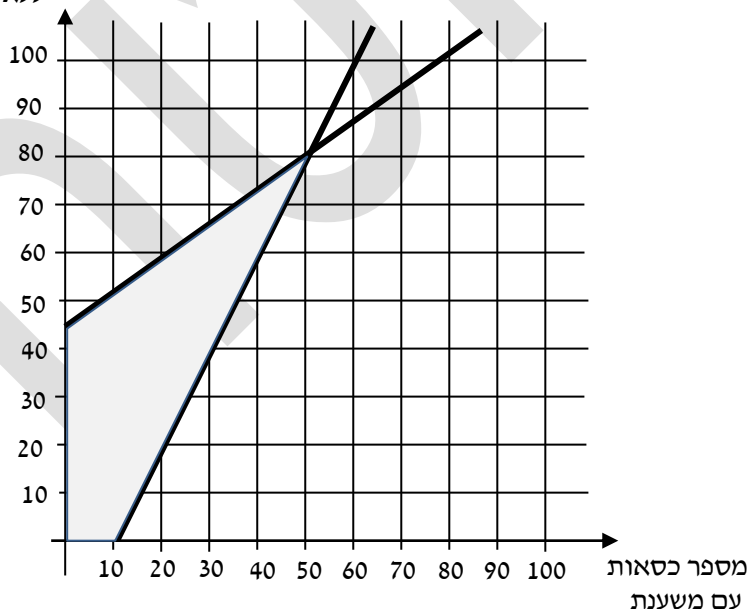
מספר כסאות
ללא משענת



מספר כסאות
ללא משענת



מספר כסאות
ללא משענת



הרווח עבור כיסא עם משענת הוא 40 ₪ ועבור כיסא ללא משענת הוא 25 ₪.

א. באיזו המפעלים יש לבחור כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי?

ב. כמה כסאות עם משענת וכמה כסאות ללא משענת יש לייצר כדי להגיע לרווח המקסימלי?

קבוצת דוגמאות 1.2

אפיון:

השאלות בקבוצת דוגמאות זו מכילות מערכת של 3-5 אילוצים שתיאורם הגרפי נותן תחום

אפשרי פתוח.

דוגמאות לתחומים כאלה:



השאלות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו קשורות לכל השלבים הנדרשים לפתרון שאלה בתכנון

לינארי (מאפיינת אופטימיזציה לינארית) או לחלקם (מאפיינת אופטימיזציה לינארית).

דוגמה

יניב החליט להשקיע סכום של 10,000 שקלים בשלושה סוגי חסכוניות לתקופת חיסכון מסוימת.

לאחר שעשה את החשבון המתאים גילה שבתום תקופת החיסכון:

- בתכנית א ירוויח 48 אגורות לכל שקל שישקיע.
- בתכנית ב ירוויח 28 אגורות לכל שקל שישקיע.
- בתכנית ג ירוויח 41 אגורות לכל שקל שישקיע.

בהמלצת רואה החשבון שלו, החליט יניב לשמור על האילוצים הבאים:

- בתכנית א ישקיע לפחות 2,000 שקלים.
- בתכנית ג להשקיע לפחות כמו בתכנית א.
- ההשקעה בתכנית ב תהיה גדולה מההשקעה בתכנית ג או שווה לה.

סמנו: x - סכום הכסף (בשקלים) שישקיע יניב בתכנית א.

y - סכום הכסף (בשקלים) שישקיע יניב בתכנית ב.

כיצד על יניב לחלק את ההשקעות בין התכניות, בהתאם לאילוצים, כך שיגיע לרווח מקסימלי בתום תקופת החיסכון? מהו הרווח המקסימלי?



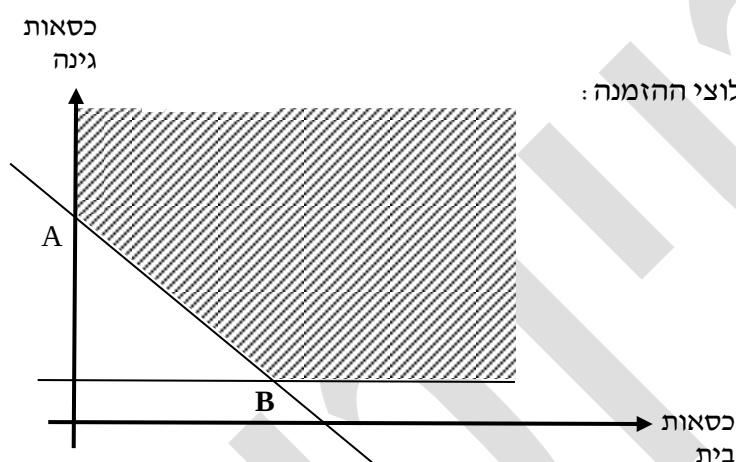
תכנון ליניארי - שאלת חיסכון.bgg

אפשרות לשילוב אמצעי טכנולוגי

דוגמה

במחלקת כסאות של מפעל רהיטים מייצרים שני סוגי כסאות : כסאות לפנים הבית וכסאות גינה.
בכל הכיסאות המושבים והמשענות עשויים מעץ (אותו סוג עץ) והרגליים מאלומיניום.
לייצור כיסא-בית משתמשים ב- 0.18 מ"ר עץ וב- 2.5 ק"ג אלומיניום,
ולייצור כיסא-גינה משתמשים ב- 0.14 מ"ר עץ וב- 2 ק"ג אלומיניום.
המחיר שמשלם המפעל עבור 1 מ"ר עץ הוא 50 שקלים והמחיר ל-1 ק"ג אלומיניום הוא 6 שקלים.
א. חשבו את מחיר עלות החומרים לייצור כיסא אחד לבית ומחיר עלות החומרים לייצור כיסא אחד לגינה.

למפעל הגיעה הזמנה עם דרישה שיהיו לפחות 500 כסאות ומתוכם, מספר הכיסאות לגינה יהיה גדול מ-120.



- חשבו את שיעורי הנקודות A ו-B והסבירו את המשמעות של כל נקודה בהקשר לשאלה.
- סמנו בסרטוט נקודה המתארת ייצור של 500 כסאות-בית ו-120 כסאות גינה. האם הנקודה שסימנתם מתאימה לאילוצי השאלה? נמקו.
- סמנו בסרטוט נקודה המתארת ייצור של 100 כסאות-בית ו-300 כסאות-גינה. האם נקודה זו מתאימה לאילוצי השאלה? נמקו.
- היכן, בסרטוט, נמצאות כל הנקודות שמתארות ייצור של כסאות-גינה בלבד?
- מה צריך להיות מספר הכיסאות שעל המפעל לייצר כך שעלות החומרים תהיה מינימלית?

דוגמה (שילוב של תחום פתוח - בחלק א, ותחום סגור - בחלק ב)
 במסגרת טיפול רפואי, הומלצה למטופל דיאטה מיוחדת שמכילה רק שני סוגי מזון. פירוט
 התכולה של יחידת מזון מכל סוג :

סוג	פחמימות	חלבונים	סיבים תזונתיים
יחידת מזון מסוג א	50 גרם	40 גרם	25 גרם
יחידת מזון מסוג ב	40 גרם	16 גרם	5 גרם

לפי הוראות הרופא, המטופל חייב לאכול ביום לפחות 800 גרם פחמימות, לפחות 480 גרם
 חלבונים ולפחות 200 גרם סיבים תזונתיים.

תנאי נוסף שהציב הרופא הוא שהמטופל חייב באכילת שני סוגי המזון.

סמנו: x – מספר יחידות המזון מסוג א שהמטופל צריך לאכול.

y – מספר יחידות המזון מסוג ב שהמטופל צריך לאכול.

חלק א

א. האם, בהתאם להוראות הרופא, המטופל רשאי לאכול ביום 20 יחידות מזון מסוג א ו-0 גרם
 מזון מסוג ב?

ב. האם, בהתאם להוראות הרופא, המטופל רשאי לאכול ביום 10 יחידות מזון מסוג א ו-20 גרם
 יחידות מזון מסוג ב?

ג. באחד הימים, המטופל אכל 6 יחידות מזון מסוג א ו-15 יחידות מזון מסוג ב. האם המטופל
 מילא באותו יום אחרי הוראות הרופא? נמקו.

ד. ביום אחר, המטופל אכל 6 יחידות מזון מסוג א ו-10 יחידות מזון מסוג ב. האם המטופל
 מילא באותו יום אחרי הוראות הרופא? אם כן, נמקו. אם לא, אילו מהוראות הרופא לא
 מולאו?

ה. מהו המספר המינימלי של יחידות מזון מכל סוג שעל המטופל לאכול ביום בהתאם להוראות
 הרופא?

חלק ב

ו. לאחר תקופה של הקפדה על הדיאטה הנ"ל, הבחין המטופל שהוא עולה במשקל, ובכך אינו
 מעוניין. כדי למנוע השמנה, הקפיד המטופל לצרוך לכל היותר 1,300 גרם פחמימות. (תוך
 שמירה על הוראות הרופא הנ"ל)
 מהו המספר המקסימלי של יחידות המזון מכל סוג שעל החולה לאכול ביום כדי לעמוד בכל
 התנאים?



קבוצת דוגמאות 1.3

אפיון:

השאלות בקבוצת דוגמאות זו מכילות מערכת של 3-5 אילוצים שניתנים על ידי תיאור מילולי או תיאור גרפי ופונקציית המטרה שמכילה פרמטר אחד או שניים. השאלות מתמקדות במציאת ערך הפרמטר/ים על סמך נתונים בשאלה, כגון: ערך מינימלי ו/או ערך מינימלי נתון של פונקציית המטרה, ערך זהה של פונקציית המטרה בשני קדקודי התחום האפשרי ועוד.

השאלות שתישאלנה בקבוצת דוגמאות זו קשורות לכל השלבים הנדרשים לפתרון שאלה בתכנון לינארי (מטרה אופטימלית מס' 1) או לחלקם (מטרה אופטימלית מס' 2) וכן במציאת ערך הפרמטרים על ידי פתרון משוואה ליניארית או מערכת משוואות ליניאריות (מטרה אופטימלית מס' 3).

דוגמה

ועד העובדים מעוניין להזמין במפעל מזון חבילות שי המכילות שקיות חטיפים וחפיסות שוקולד. הוועד החליט שכל חבילה תכיל לכל היותר 20 פריטים. משקלה של כל חבילה יהיה לפחות 3,000 גרם, ונפחה לפחות 4,800 סמ"ק. המשקל, הנפח והמחיר של חטיפים ושוקולד רשומים בטבלה שלפניכם:

משקל	נפח	מחיר	
100 גרם	600 סמ"ק	m ₪	שקית חטיפים
300 גרם	150 סמ"ק	n ₪	חפיסת שוקולד

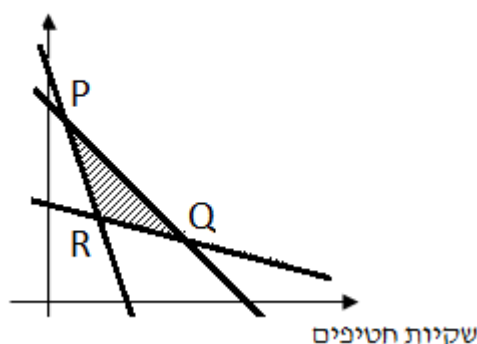
נסמן: x - מספר שקיות החטיפים בכל חבילת שי

y - את מספר חפיסות השוקולד בכל חבילת שי.

א. רשמו את מערכת האילוצים של המצב המתואר בשאלה.

ב. הגרף הבא מתאר את מערכת האילוצים הנ"ל. מצאו את השיעורים של הנקודות P , Q ו- R .

חפיסות שוקולד



ג. רשמו, באמצעות הפרמטרים m , n את הפונקציה שמתארת את המחיר של חבילת שי (פונקציית המטרה).

ד. ידוע כי:

- הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 180 ₪ והוא מתקבל בנקודה Q .

- הערך המינימלי של פונקציית המטרה הוא 108 ₪ והוא מתקבל בנקודה R. מצאו את המחירים של שקית חטיפים ושל חפיסת השוקולד.

דוגמה

במפעל פועלות שלוש מכונות D_1, D_2 ו- D_3 המשמשות להכנת שני סוגים של מוצרים (א ו- ב). בטבלה הבאה מפורטות:

- השעות הדרושות לכל מכונה לייצור פריט אחד מכל סוג של מוצר.
- המספר המקסימלי של השעות העומדות לרשות המפעל במחזור ייצור אחד.
- הרווח הנקי שמקבל המפעל ממכירת פריט אחד מכל סוג.

רווח נקי	D_3	D_2	D_1	
מוצר מסוג א	1 שעה	4 שעות	1 שעה	90 ₪
מוצר מסוג ב	3 שעות	2 שעות	1 שעה	k ₪
מספר מקסימלי של שעות במחזור אחד	30 שעות	40 שעות	12 שעות	

נסמן:

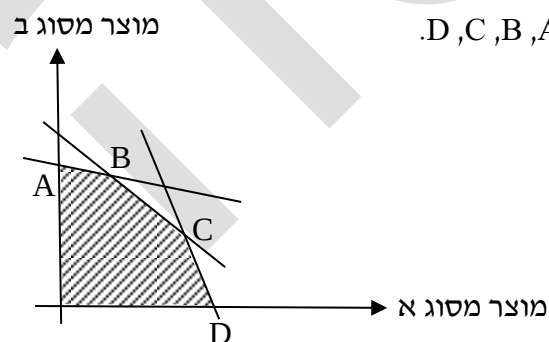
x - מספר שקיות החטיפים בכל חבילת שי

y - מספר חפיסות השוקולד בכל חבילת שי.

א. רשמו את מערכת האילוצים של השאלה.

ב. הגרף הבא מתאר את מערכת האילוצים הנ"ל.

מצאו את השיעורים של הנקודות A, B, C, D.



ידוע שבשתי הנקודות B ו- C מתקבל אותו רווח, שהוא הרווח המקסימלי.

מצאו את הרווח שהמפעל מקבל ממכירת המוצר מסוג ב.