הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הנושא: **אלגברה מאחורי תעלולי קלפים**

הוכן ע״י: אדם קניגסברגר.

תקציר: בחומר מובאים תעלולי קלפים המבוססים על טכניקות של ספירה ועל עקרונות אלגבריים פשוטים.

מילות מפתח: משחק, קלפים, חשבון, ספירה, אלגברה, שינוי נושא הנוסחא.

החומר הוגש במסגרת: ״קשר-חם״ חיפה, סדנא שלישית בתשנ״ד, ינואר 1994
״קשר חם״ תל-אביב, סדנא שלישית בתשנ״ד, ינואר 1994
״קשר חם״ באר שבע, סדנא שלישית בתשנ״ד, פברואר 1994

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

אלגברה מאחורי תעלולי קלפים
שעור לערב פורים

אם ברצונך לגרום לתלמידיך הנאה ואינך חושש להופיע בפניהם כקוסם בערב פורים (אם יהיה לך גם האומץ להתחפש לכזה) הרי לפניך מספר רעיונות לשעור מקורי ויצירתי העוסק בתעלולי קלפים.
קוסמים מציגים לפנינו תעלולים הנראים כבלתי אפשריים. חלק מהתעלולים הם אחיזת עיניים או זריזות ידיים, כמו למשל: הוצאת יונים מהשרוול, קטיפת שטרות כסף מהאוויר וחציית נערות יפות לשניים.
אבל חלק מהתעלולים, בעיקר תעלולי קלפים, הנראים בלתי אפשריים, מסתמכים על אלגברה אלמנטרית ולא על אשליה.
למעשה התעלולים הם בעיות חישוב הנפתרות ע"י משוואות ליניאריות במספר משתנים.
בהמשך נטפל בפיתוח הכלים לפתרון תעלולי קלפים ע"י אלגברה ליניארית כדי להביא לתלמידים חומר משעשע ויצירתי.

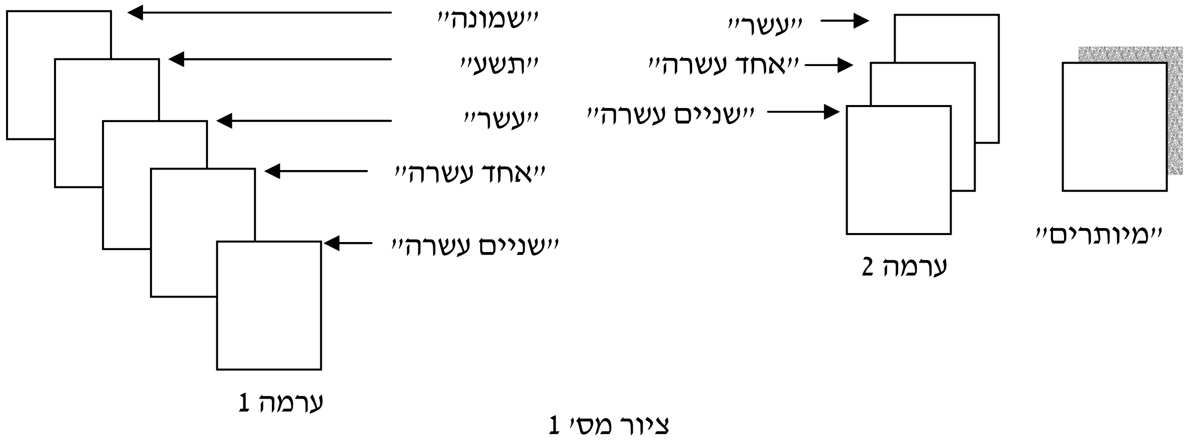
<u>תעלול קלפים מס' 1</u>
בתעלול זה משתמשים בחפיסה רגילה של 52 קלפים, המקבלים את הערכים המספריים הבאים: כל אס נחשב ל "1", שתיים עד עשר מקבלים את ערכיהם הרגילים, נסיך, מלכה ומלך נחשבים ל "10". כעת, מחוץ לשדה ראייתכם, מישהו מסדר ערמות קלפים באופן הבא: הוא לוקח קלף מהחפיסה, זוכר את ערכו המספרי, ומניח אותו הפוך. הוא מסתכל על ערכו המספרי של קלף זה, וסופר קלפים נוספים מהחפיסה (כולם הפוכים) החל מהמספר המייצג את ערכו המספרי של הקלף, ועד ל "12". לדוגמה, אם הקלף הראשון היה שבע, הוא יספור לעצמו "שבע", "שמונה", "תשע", "עשר", "אחת עשרה" ו"שתים עשרה", וייצור ערימה של שישה קלפים כשהתחתון הוא שבע והעליון מקבל את הערך "שתים עשרה". באותה שיטה הוא מסדר ערמות נוספות, עד שהחפיסה נגמרת או שאין מספיק קלפים לערימה נוספת.
עכשיו בא התעלול: נכריז את סכום ערכיהם המספריים של הקלפים התחתונים. כדי לעשות זאת, נשתמש בכלל הבא: נכפול את מספר הערמות ב- 13, נחסר 52, ונוסיף את מספר הקלפים המיותרים. כלל זה נותן את הסכום שעליו הכרזנו. לדוגמה, אם היו חמש ערמות ועוד שלושה קלפים מיותרים, סכום הערכים המספריים של הקלפים התחתונים יהיה: $13 \cdot 5 - 52 + 3 = 16$.
לפני שנמשיך, נקדיש מספר דקות כדי לשכנע את עצמנו, בעזרת חפיסת קלפים, וע"י בניית ערמות משלנו שהכלל עובד תמיד. הכלל לתעלול קלפים זה מוכח בעזרת טכניקות ספירה בסיסיות ואלגברה. לפני שניגש לפתרונו, נפתח שני עקרונות בסיסיים שישמשו אותנו בכל תעלולי הקלפים שיוצגו כאן.

"אלגברה מאחורי תעלולי קלפים", אדם קניגסברגר
"קשר-חם", המרכז הארצי לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי
טכניון, חיפה

<u>שני עקרונות בסיסיים</u>

<u>עב1 (עקרון בסיסי 1)</u>: סכום מספרי הקלפים בערמות השונות שווה למספר הקלפים הכללי בחפיסה.

כדי להדגים כיצד ניתן להשתמש ב-עב1, נניח שיש לנו חפיסה של 15 קלפים ואנו בונים שתי ערמות, ע1 ו- ע2, כמו בתעלול הקלפים הראשון. נניח שהקלף התחתון ב- ע1 הוא 8, והקלף התחתון ב- ע2 הוא מלך, אז יש חמישה קלפים ב- ע1 ושלושה ב- ע2, כמתואר בציור מס׳ 1.



ציור מס׳ 1

15 = (מספר המיותרים) + (מספר הקלפים ב- ע2) + (מספר הקלפים ב- ע1)

15 = 7 + 3 + 5

למרות שציור מס׳ 1 מדגים את עב1, הוא יכול גם להציג את העקרון הבסיסי השני המקשר את מספר הקלפים בערימה עם הערכים שעל הקלף העליון והקלף התחתון שבה. שני התרגילים הבאים מציגים עקרון זה.

<u>שימו לב</u>: פתרון התרגילים המוצגים להלן, מופיע בהמשך.

<u>תרגיל מס׳ 1</u>: מבין חמשת הקלפים שב- ע1 בציור מס׳ 1 על הקלף התחתון רשום 8, והקלף העליון קיבל את הערך 12.

(א) הסבירו מדוע מספר הקלפים ב- ע1 אינו ההפרש: 8 - 12 ? מהו מספר הקלפים בערימה זו?

(ב) הסבירו מדוע מספר הקלפים ב- ע2 אינו ההפרש: 10 - 12 ? מהו מספר הקלפים בערימה זו?

<u>תרגיל מס׳ 2</u>: נניח שבעת יצירת ערמת קלפים וספירת ערכים כמו בתעלול קלפים 1, הקלף התחתון בעל ערך B והקלף העליון קיבל את הערך T. פתחו נוסחה למספר הקלפים בערימה, תוך שימוש ב- B ו- T.

התוצאה של תרגיל 2 תיקרא להלן – עקרון בסיסי 2.

<u>עב2 (עקרון בסיסי 2)</u>: בעת יצירת ערימת קלפים שהקלף התחתון שלה בעל ערך B והקלף העליון מקבל את הערך T, מספר הקלפים בערימה הוא T - B + 1

<u>תרגיל מס׳ 3</u>: נניח שישנה חפיסה של 36 קלפים. מסדרים שתי ערימות, ע1 ו- ע2 (כמו בתעלול קלפים 1), כאשר הקלף התחתון ב- ע1 הוא 5, והקלף התחתון ב- ע2 הוא נסיך. בעת סידור ערימות אלה, נניח שמפסיקים לספור ב- ע1 ב- 10, וב- ע2 ב- 14. מה מספר הקלפים שנשארו אחרי סידור שתי הערימות?
רמז: העזרו ב- עב1 וב- עב2.

<u>פתרון תעלול קלפים 1</u>

ע״י שיטות אלגבריות ושני העקרונות שנדונו לעיל, ניתן עתה ליצור נוסחה וכלל לפתרון תעלול קלפים 1.

יהי B_1 = ערכו המספרי של הקלף התחתון בערימה הראשונה.
יהי B_2 = ערכו המספרי של הקלף התחתון בערימה השניה.

נניח שיצרנו k ערימות. נסמן:
B_k = ערכו המספרי של הקלף התחתון בערימה ה k -ית.

על פי עב2 ישנם
$12-B_1+1 = 13-B_1$ קלפים בערימה הראשונה,
$12-B_2+1 = 13-B_2$ קלפים הערימה השניה,
.
.
.
$12-B_k+1 = 13-B_k$ קלפים בערימה ה- k -ית.

נניח שלאחר יצירת k הערימות, נותרו D קלפים. נקבל:

$$\underbrace{(13-B_1)+(13-B_2)+...+(13-B_k)}_{\text{מספר הקלפים ב k הערימות}} + \underbrace{D}_{\text{מספר הקלפים המיותרים}} = \underbrace{52}_{\text{מספר הקלפים בחפיסה}} \qquad (1)$$

מאחר שברצוננו להכריז את סכום הערכים המספריים שעל הקלפים התחתונים בכל הערימות, עלינו לחשב מתוך (1) את $(B_1 + B_2 + ...+ B_k)$.
אם נכנס איברים ב- (1) נקבל:

$$\underbrace{13 + 13 + ... + 13}_{\text{k פעמים 13}} - B_1 - B_2 - ... - B_k + D = 52$$

$$13 \cdot k - (B_1 + B_2 + ... + B_k) + D = 52$$

$$13 \cdot k - 52 + D = B_1 + B_2 + ... + B_k \qquad (2)$$

מאחר שהאגף הימני של (2) הוא המספר בו אנו מעוניינים, נקבל אותו מהאגף השמאלי של (2). לכן, כדי למצוא את המספר שלנו, צריך לדעת רק את מספר הערימות k, ואת מספר הקלפים המיותרים D. כך, מצאנו את הכלל המוצהר לפתרון תעלול קלפים 1.

<u>תרגיל מס׳ 4 (תעלול קלפים מס׳ 2)</u>: נניח שברשותכם חפיסה בת 42 קלפים. אתם יוצרים שלוש ערימות קלפים כמו בתעלול קלפים מס׳ 1, רק שאתם סופרים קלפים עד ל- ״13״ בכל ערימה.

פתחו נוסחה, ואח"כ כלל, שיאמר לכם את סכום הערכים המספריים של הקלפים התחתונים של שלוש הערימות אם ידוע לכם מספר הקלפים המיותרים.

<u>תרגיל מס' 5 (תעלול קלפים מס' 3)</u>: נניח שברשותכם חפיסה בת 39 קלפים. אתם יוצרים שלוש ערימות קלפים: בראשונה אתם סופרים עד "10" , בשניה עד "12" ובשלישית עד "14". פתחו נוסחה, ואח"כ כלל, שיאמר לכם את ערכו המספרי של קלף תחתון באחת הערימות אם אתם יודעים את סכום ערכיהם המספריים של הקלפים התחתונים בשתי הערימות האחרונות ואת מספר הקלפים המיותרים.

<u>תעלול קלפים מס' 4</u>

בתעלול זה משתמשים בחפיסה רגילה של 52 קלפים, המקבלים את הערכים המספריים הבאים: אס נחשב ל "1", שתים עד עשר מקבלים את ערכיהם הרגילים, נסיך - "11", מלכה - "12" ומלך - "13". כעת, מחוץ לטווח ראייתכם, מישהו מסדר ערימות קלפים באופן הבא: מניח את הקלף העליון בחבילת הקלפים כשפניו כלפי מעלה, זוכר את ערכו המספרי ומניח עליו קלפים נוספים (כשפניהם כלפי מעלה), כאשר הפעם הוא סופר עד 13. באותה שיטה הוא מסדר ערמות נוספות ושם בצד את הקלפים שנותרו.

אז הוא הופך שלוש ערימות ואת שאר הערימות הוא מצרף לקלפים שנותרו. לבסוף, הוא הופך שניים משלושת הקלפים העליונים.

הכלל עבור התעלול: לוקחים את הקלפים המיותרים, ומוציאים קלפים במספר גדול ב- 10 מסכום ערכי הקלפים הגלויים. מספר הקלפים שנותרו בידכם הוא ערכו המספרי של הקלף העליון ההפוך בערימה השלישית!

כדי לנתח תעלול זה, יש להתחשב רק בשלוש הערימות שנשארו בסוף.

יהיו T_1, T_2 ו-T_3 ערכיהם המספריים של הקלפים העליונים של הערימה הראשונה, השניה והשלישית בהתאמה, כך שמספר הקלפים בערימות הוא $(14 - T_1)$, $(14 - T_2)$, $(14 - T_3)$

אם מספר הקלפים הנותרים הוא D, נקבל:

$$(14 - T_1) + (14 - T_2) + (14 - T_3) + D = 52 \quad (3)$$
$$42 + D - (T_1 + T_2 + T_3) = 52$$
$$D - (T_1 + T_2 + T_3) = 10$$

נניח שאתם יודעים את ערכיהם המספריים של הקלפים העליונים בשתי ערימות הראשונות, אזי

$$T_3 = D - (10 + T_1 + T_2)$$

לכן, ערכו המספרי של הקלף ההפוך T_3 מתקבל על ידי חיסור הסכום של עשר ושל ערכיהם המספריים של הקלפים הגלויים ממספר הקלפים הנותרים. במילים אחרות, אם אתם מוציאים מהקלפים הנותרים מספר קלפים הגדול בעשר מסכום ערכיהם של הקלפים הגלויים, מספר הקלפים שיוותרו בידכם הוא ערכו המספרי של הקלף ההפוך בערימה השלישית.

<u>תרגיל מס' 6 (תעלול קלפים מס' 5)</u>: נניח שבתעלול קלפים מס' 4, משאירים ארבע ערימות קלפים. פתחו נוסחה, ואח"כ כלל, שיאמר לכם את ערכו המספרי של אחד הקלפים העליונים אם אתם יודעים את מספר הקלפים הנותרים ואת ערך הקלף העליון בכל אחת משלוש הערימות האחרות.

<u>תרגיל מס' 7 (תעלול קלפים מס' 6)</u>: נחלק חפיסה רגילה בת 52 קלפים לשתי ערימות נפרדות והפוכות של 26 קלפים כל אחת, ונסמן אחת ב- A ואחת ב- Z. הערכים המספריים של הקלפים הם כמו בתעלול קלפים מס' 1. בערימה A, ספרו עד לקלף השביעי מלמעלה, והראו אותו למישהו, אבל אל תביטו בו בעצמכם. אז החזירו את הקלפים בערימה A לסדרם המקורי. עתה, צרו מערימה Z ערימות קלפים, החל ב Z_1, באופן הבא: אמרו את ערכו המספרי של הקלף העליון, והמשיכו להוציא קלפים (כולם גלויים) עד ל"10". באופן דומה צרו שתי ערימות נוספות Z_2 ו- Z_3 . עתה שימו את הקלפים הנותרים מערימה Z על ערימה A וצרו כך ערימה C (שכולה קלפים הפוכים). עתה, הפכו את Z_1 , Z_2 ו- Z_3 (כך שכל הקלפים הופכים להיות הפוכים), הפכו

את הקלף העליון בכל ערימה, וסכמו את הערכים המספריים של שלושת הקלפים ההפוכים הללו. ספרו מערימה C עד לקלף שמספרו שווה לסכום זה. איזה קלף זה? מדוע עובד תעלול זה?

<u>תרגיל מס' 8</u>: תעלול קלפים מס' 6 לא תמיד עובד. חקרו את נוסחה (4) (בפתרון לתרגיל 7) והראו מדוע התעלול לא תמיד עובד.

<u>תרגיל מס' 9</u>: לאחר שראיתם מגוון תעלולי קלפים ופתרונות אלגבריים לכולם, פתחו תעלול קלפים משלכם וודאו את פתרונו באופן אלגברי.

<u>מסקנה</u>
אין שום דבר פלאי או מוזר בתעלולי הקלפים שהוצגו. הפתרונות אינם מערבים שום אשליות או "זריזות ידיים" אלא טכניקות של ספירה, בשילוב של אלגברה, נותנים את הפתרון.

<u>פתרון לתרגילים</u>

1. יש לזכור כי מספר העצמים העומדים בשורה גדול ב- 1 ממספר הרווחים הנוצרים ביניהם. $(12 - 8)$ מבטא את מספרי הרווחים בין הקלף שערכו 8 לבין הקלף שערכו 12 וכדי למצוא את מספר הקלפים יש להוסיף 1 להפרש זה.
   לכן מספר הקלפים ב- ע1 הוא $(12 - 8) + 1 = 5$
   באופן דומה מס' הקלפים ב- ע2 הוא $(12 - 10) + 1 = 3$.
2. ההפרש $(T-B)$ מבטא את מספר הקלפים מהקלף שאחרי הקלף שערכו B עד לקלף שערכו T כדי לכלול את הקלף שערכו B, אתם צריכים להוסיף 1 להפרש. לכן מספר הקלפים בערימה שהקלף התחתון בה בעל ערך B והעליון בעל ערך T, הוא: $(T - B) + 1 = B$
3. יהי D מספר הקלפים הנותרים אחרי שנוצרו שתי הערימות. על פי עב2:
   מספר הקלפים בערימה ע1, הוא $(10 - 5) + 1 = 6$
   מספר הקלפים בערימה ע2, הוא $(14 - 10) + 1 = 5$
   על פי עב1:

$$\underbrace{[(10-5)+1]}_{\text{מספר הקלפים בערימה ע1}} + \underbrace{[(14-10)+1]}_{\text{מספר הקלפים בערימה ע 2}} + \underbrace{D}_{\text{מספר הקלפים המיותרים}} = \underbrace{36}_{\text{מספר הקלפים בחפיסה}}$$

$$6 + 5 + D = 36$$
$$D = 25$$

   לכן, נותרו 25 קלפים אחרי סידור שתי הערימות.

4. יהיו B_1, B_2 ו- B_3 הערכים המספריים של הקלפים התחתונים של הערימה הראשונה, השנייה והשלישית בהתאמה.
   על פי עב2 נקבל:
   $(14 - B_1)$ הוא מספר הקלפים בערימה הראשונה,
   $(14 - B_2)$ הוא מספר הקלפים בערימה השנייה,
   $(14 - B_3)$ הוא מספר הקלפים בערימה השלישית.

   אם נותרו D קלפים, אזי לפי עב1 נקבל:

$$(14 - B_1) + (14 - B_2) + (14 - B_3) + D = 42$$
$$3\cdot 14 - B_1 - B_2 - B_3 + D = 42$$
$$42 - (B_1 + B_2 + B_3) + D = 42$$
$$- (B_1 + B_2 + B_3) + D = 0$$
$$D = B_1 + B_2 + B_3$$

<u>כלל :</u> סכום הערכים המספריים של הקלפים התחתונים בשלוש הערימות שווה למספר הקלפים שנותרו.

5. יהיו B_1, B_2 ו- B_3 הערכים המספריים של הקלפים התחתונים של הערימה הראשונה, השניה והשלישית בהתאמה. על פי עב2 נקבל :

$$\underbrace{(11-B_1)}_{\text{מספר הקלפים בערימה הראשונה}}+\underbrace{(13-B_2)}_{\text{מספר הקלפים בערימה השניה}}+\underbrace{(15-B_3)}_{\text{מספר הקלפים בערימה השלישית}}+\underbrace{D}_{\text{מספר הקלפים הנותרים}}=\underbrace{39}_{\text{מספר הקלפים בחפיסה}}$$

$$11 + 13 + 15 - B_1 - B_2 - B_3 + D = 39$$
$$(11 + 13 + 15) - (B_1 + B_2 + B_3) + D = 39$$
$$39 - (B_1 + B_2 + B_3) + D = 39$$
$$(B_1 + B_2 + B_3) + D = 0$$
$$D = B_1 + B_2 + B_3$$

אם יודעים, למשל, את הערכים המספריים של הקלפים התחתונים של הערימה הראשונה והשלישית, B_1 ו- B_3, ואת מספר הקלפים שנותרו (D), אז נקבל :

$$B_2 = D - (B_1 + B_3)$$

<u>כלל</u> : כדי למצוא ערכו המספרי של קלף תחתון באחת הערימות, יש לחסר את סכום ערכיהם המספריים של הקלפים התחתונים בשתי הערימות האחרות ממספר הקלפים שנותרו.

6. יהיו T_1 , T_2 , T_3 ו- T_4 ערכיהם המספריים של הקלפים העליונים של הערימות הראשונה, השניה, השלישית והרביעית, בהתאמה, ויהי D מספר הקלפים הנותרים. נקבל :

$$(14 - T_1) + (14 - T_2) + (14 - T_3) + (14 - T_4) + D = 52$$
$$56 + D - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = 52$$
$$D - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = -4$$

אם למשל יודעים את ערכיהם המספריים של הקלפים העליונים בערימות הראשונה, השלישית והרביעית, נקבל :

$$D - T_2 = (T_1 + T_3 + T_4) - 4$$
$$T_2 = D - [(T_1 + T_3 + T_4) - 4]$$

וזו הנוסחה למציאת T_2.

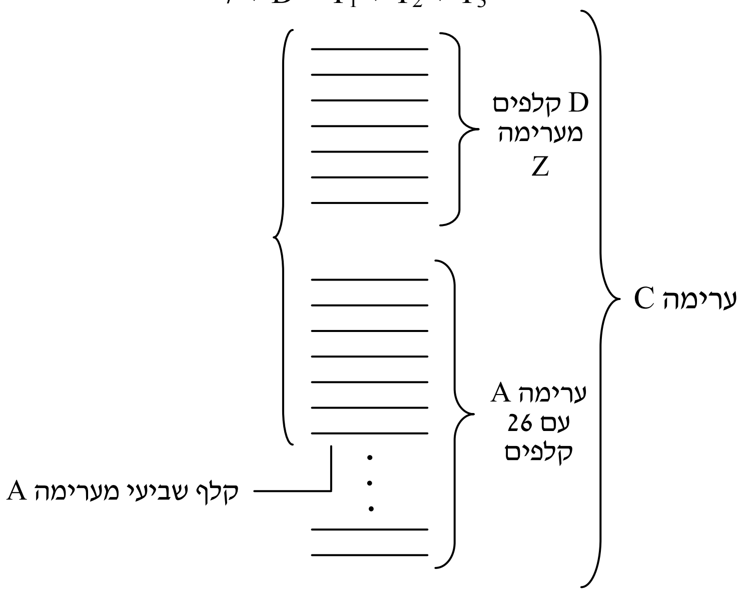
<u>כלל :</u> כדי למצוא את ערכו המספרי של הקלף העליון ההפוך, יש לחסר 4 מסכום ערכיהם המספריים של הקלפים הגלויים ולהוציא קלפים במספר זה מערימת הקלפים שנותרו. מספר הקלפים שנשארו הוא ערכו המספרי של הקלף ההפוך.

7. יהיו T_1, T_2 ו- T_3 ערכיהם המספריים של הקלפים העליונים של שלוש הערימות, אחרי שנוצרו ונהפכו עם הפנים למטה.
אזי $(11 - T_1)$, $(11 - T_2)$, ו- $(11 - T_3)$ הם מספרי הקלפים בערימות הראשונה, השניה והשלישית, בהתאמה. מאחר שערימות אלה נוצרו מערימה Z, שבה כאמור יש 26 קלפים, נקבל :

$$(11 - T_1) + (11 - T_2) + (11 - T_3) + D = 26 \tag{4}$$

כאשר D הוא מספר הקלפים שנותרו ושימשו ליצירת ערימה C.
מאחר ש $(T_1 + T_2 + T_3)$ הוא סכום ערכיהם המספריים של שלושת הקלפים הגלויים,
נפתור את (4) עבור $(T_1 + T_2 + T_3)$. נקבל:

$$33 - (T_1 + T_2 + T_3) + D = 26$$
$$7 + D = T_1 + T_2 + T_3 \tag{5}$$



מאחר שמספר הקלפים שספרנו מערימה C הוא $T_1 + T_2 + T_3$, השווה ל- $D + 7$, לפי (5) יוצא שספרנו בדיוק את כל הקלפים הנותרים מערימה Z ועוד 7 קלפים מערימה A.

8. אם שלושת הקלפים העליונים הגלויים הם כולם אסים, אזי $T_3 = T_2 = T_1 = 1$, כך ש- (4) הופך להיות

$$(11 - 1) + (11 - 1) + (11 - 1) + D = 26$$
$$33 - (1 + 1 + 1) + D = 26$$
$$33 - 26 + D = 3$$
$$7 + D = 3$$
$$D = -4$$

אבל D לא יכול להיות מספר שלילי. באופן כללי, ישנם ערכים נוספים ששלושת הקלפים העליונים הגלויים יכולים לקבל כך שתעלול זה לא יעבוד.

לפי (5)

$$D = (T_1 + T_2 + T_3) - 7$$

מאחר ש- D לא יכול להיות שלילי, חייב להתקיים:

$$(T_1 + T_2 + T_3) \geq 7$$

לכן, סכום שלושת הקלפים העליונים הגלויים צריך להיות לפחות 7.

החומר עובד על פי המאמר:
Lindstrom, P.A. (1983). Some Card Tricks: Algebra in Disguise. *UMAP UNIT 560, COMAP*. Department of Mathematics, Genesee Community College, Batavia, NY 14020.

מקורות נוספים: הדר, נ. שיעור מתמטיקה בערב פורים. *שבבים*, תיק מספר 12.
