הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי

הנושא: רשת כבישים מינימלית

הוכן ע"י: אדם קניגסברגר.

תקציר: בחומר מוצגת שיטה למציאת הדרך הקצרה ביותר המחברת נקודות במישור.

מילות מפתח: גיאומטריה, הנדסה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, משולש, מרובע, סיבוב, נקודת פרמה, זווית ראיה של קטע, בעיות מינימום, טריגונומטריה, התרת משולשים, משולש ישר זווית, משולש שווה שוקיים, יעקב שטיינר.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חם" בחיפה, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ה, ינואר 1995.
"קשר-חם" בבאר-שבע, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ה, פברואר 1995.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

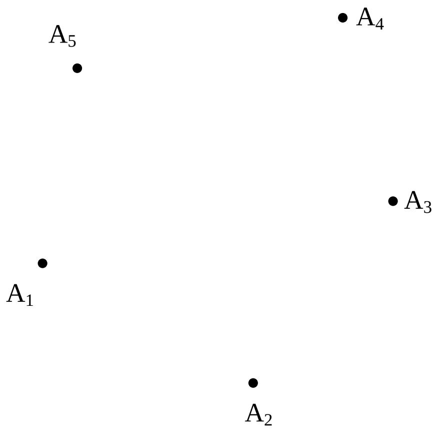
רשת כבישים מינימלית - פתרון בעזרת סיבוב ואמצעים פיסיקליים

באזור המישורי של הנגב הוחלט להקים חמישה ישובים. בשלב התכנון נאמר למהנדסים שקיימות בעיות תקציב ולכן עליהם לתכנן רשת כבישים שתקיים את התנאים הבאים :

א. רשת הכבישים צריכה להיות מורכבת מקטעים ישרים שאורכם הכללי יהיה הקצר ביותר.

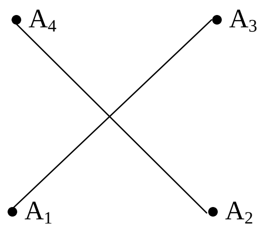
ב. כל שני ישובים מחוברים על ידי קו שבור הכולל קטעים מתוך רשת זו.

להלן סקיצה של הישובים :



ציור מס' 1

המתכננים שלא נתקלו בבעיה דומה מעולם, פנו למתמטיקאים לעזרה והללו הציעו לנסות להתגבר על בעיה קלה יותר. אילו היו רק ארבעה ישובים, מה היתה רשת הכבישים המינימלית? האם אלכסוני המרובע שהישובים מהווים את קודקודיו עונים על הבעיה?



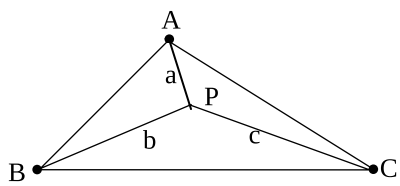
האם בריבוע רשת הכבישים הקצרה ביותר המחברת את ארבעת הקדקודים (ישובים) היא שני האלכסונים?

ציור מס' 2

מתמטיקאי אחד הציע לבדוק תחילה את המצב במקרה של שלושה ישובים.

<u>מקרה א'</u>

נתונים שלושה ישובים A, B, C. יש לחברם על ידי מערכת כבישים (בקטעים ישרים) כך שאורכם הכללי יהיה מינימלי. ברור שסכום הקטעים AB, BC, CA עונה על חלק ב' של הבעיה אבל אינו מערך מינימלי.



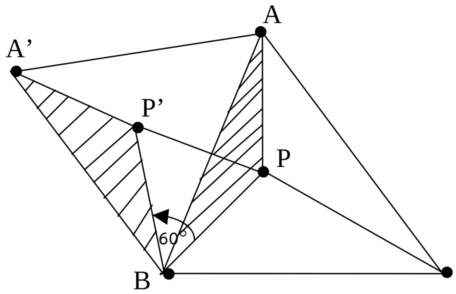
כלומר יש לחפש נקודה P (צומת) במישור המשולש כך שסכום הקטעים a+b+c יהיה מינימלי. כאשר a, b, c מציינים בהתאמה את המרחקים של הישובים A, B, C מהצומת P.

ציור מס' 3

הערה : בעיה זו הוצגה על ידי Jacob Steiner אחד המתמטיקאים הידועים שעסק בגיאומטריה תיאורית, באוניברסיטת ברלין בתחילת המאה התשע-עשרה.

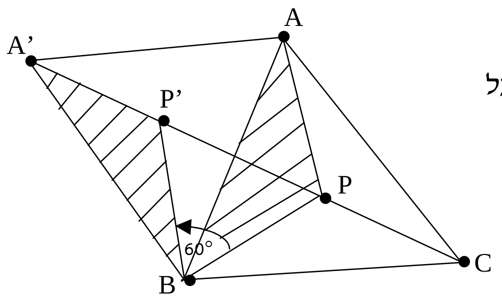
לבעיה זו מספר פתרונות. אחד היפים שבהם מיוחס לפרמה ומבוסס על רעיון הסיבוב.

נניח ששלושת הישובים יוצרים משולש ABC שאין בו זווית הגדולה או שווה ל- $120°$.
נבחר נקודה P בתוך המשולש ונחברה עם הקדקודים A, B, C על ידי קטעים ישרים.
נסובב את המשולש ABP סביב לנקודה B בזווית של $60°$ נגד כיוון השעון.
המשולש המתקבל יסומן ב- A'BP'.
כיוון ש- BP'=BP והזווית בין קטעים אלה היא בת $60°$ הרי המשולש BPP' הוא משולש שווה צלעות ולכן BP'=P'P=BP.
משיקולים דומים גם המשולש BAA' הוא שווה צלעות. אנו מחפשים נקודה P כזו שסכום הקטעים AP+BP+CP יהיה מינימלי.
מציור מס' 4 רואים כי : AP+BP+CP = A'P'+P'P+CP.



ציור מס' 4

המסלול מ-C ל- A' יהיה הקצר ביותר אם נמצא נקודה P כזו כך שהנקודות P',P,C ו- A' ימצאו על קו ישר אחד (ציור מס' 5).
נניח שזה המצב. במקרה זה :
$\sphericalangle BPC = 180° - \sphericalangle BPP'$. אבל המשולש BPP'
הוא שווה צלעות ($\sphericalangle BPP' = 60°$) ולכן :
$\sphericalangle BPC = 180° - 60° = 120°$.
באופן דומה מקבלים כי :
$\sphericalangle APB = \sphericalangle A'P'B = 180° - \sphericalangle BP'P = 120°$



ציור מס' 5

מה שמצאנו הוא, שהנקודה P המבוקשת תהיה כזו שממנה רואים את צלעות המשולש ABC בזוויות בנות $120°$. לנקודה P זו קוראים בספרות בשם "נקודת פרמה".

אם אחת מזוויות המשולש למשל $\sphericalangle A$ היא בת $120°$, אז הנקודה P נמצאת בקדקוד A עצמו, ורשת הכבישים המינימלית תהיה מורכבת משני הקטעים CA ו- BA.

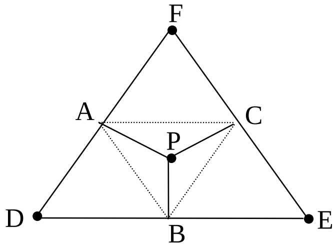
אם אחת מזוויות המשולש גדולה מ- $120°$, תימצא הנקודה P בקדקוד זווית זו, וזאת כיוון שסכום הצלעות הכולאות את הזווית, קטן מסכום כל שתי צלעות אחרות.

<u>הערה</u> : האם יתכן מצב בו הנקודה P תמצא מחוץ למשולש?

<u>בעיות למחשבה</u>

1) הראו (הוכיחו לעצמכם) שדרך אחרת לקבל את הנקודה P היא לבנות, כלפי חוץ, על שתיים מצלעות המשולש ABC, שני משולשים שווי צלעות A'BC ו - C'AB ולהעביר את AA' ו- CC'. נקודת המפגש של קווים אלה היא הנקודה P המבוקשת.
<u>רמז</u> : הוכיחו את חפיפת המשולשים ABA' ו- CBC' והראו, כי המרובע APBC' הוא בר-חסימה.

2) רעיון אחר שמוביל לפתרון הבעיה הוא להשתמש בעובדה שסכום מרחקיה של נקודה (פנימית) במשולש שווה-צלעות מצלעות המשולש שווה לגובה המשולש.
P נקודה פנימית במשולש שווה-צלעות ΔDEF.
מעבירים את האנכים לצלעות : PC, PB, PA.
נוצר המשולש ABC.
האם הנקודה P מקיימת את התנאי הנדרש?
כיצד בונים את המשולש DEF אם נתון המשולש ABC?

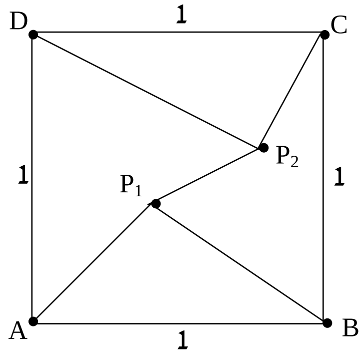


ציור מס' 6

3) נתונות ארבע נקודות A, B, C, D במרחב המהוות קדקודים של ארבעון.
מיצאו נקודה חמישית P כך ש- PA+PB+PC+PD יהיה מינימלי.

<u>מקרה ב'</u>

נחזור לבעיה ההתחלתית ולמקרה שבו יש ארבעה ישובים במישור. נניח שהישובים מונחים בקדקודיו של ריבוע שצלעו יחידה (למשל 1 ק"מ) ועלינו למצוא רשת כבישים (המורכבת מקטעים) קצרה ביותר שתחבר את ארבעת הישובים בהתאם לתנאים שהוגדרו. המחשבה הראשונית שלנו היא שהפתרון טמון ברשת הבנויה משני האלכסונים של הריבוע ואורכה יהיה $2\sqrt{2}$.
האם תתכן בכלל אפשרות אחרת?



<u>ציור מס' 7</u>

נחשוב על פתרון המבוסס על שני צמתים.
אנו מעוניינים למצוא שתי נקודות P_1 ו- P_2
כך ש- $AP_1+BP_1+P_1P_2+DP_2+CP_2$ יהיה מינימלי.

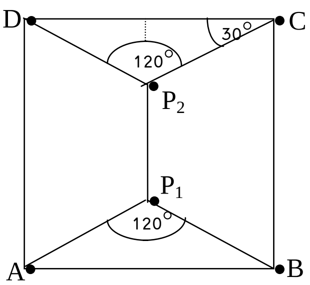
נשתמש בפתרון של מקרה א' לגבי משולש AP_2B בו P_1 צריכה להיות נקודת פרמה.
כלומר כדי ש- $AP_1+BP_1+P_1P_2$ יהיה מינימלי צריכה P_1 להימצא בנקודה שממנה רואים כל אחד מהקטעים AB, BP_2 ו-AP_2 בזווית של $120°$. וכעת מטעמי סימטריה אפשר להתייחס ל- P_2 כנקודת פרמה במשולש CP_2D ואז גם הזווית $\sphericalangle DP_2C$ צריכה להיות בת $120°$ ולכן הפתרון יהיה:

אורך הרשת שהתקבלה כעת הוא:

$$4 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\cos 30°} + \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{tg}30°\right) =$$

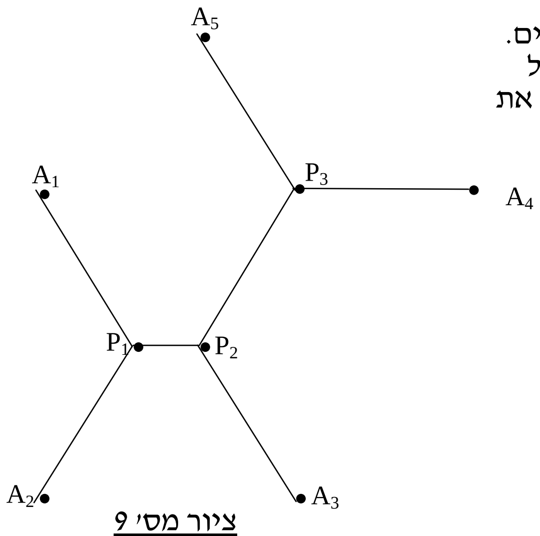
$$= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$$

שהוא קטן מ - $2\sqrt{2} \approx 2.83$ (סכום האלכסונים).



<u>ציור מס' 8</u>

נחזור לבעיה המקורית של חמשת הישובים.
הפתרון תלוי כמובן בסידור הישובים אבל בעזרת הרעיונות הקודמים אפשר למצוא את הצמתים P_1, P_2 ו - P_3.



<u>ציור מס' 9</u>

באופן כללי: עבור n נקודות יש לבנות רשת שבה n-2 צמתים שבכל אחד מהם נחתכים שלושה קטעים שביניהם זוויות בנות $120°$.

<u>אמצעים פיסיקליים</u>

פתרון נפלא לבעיית שטיינר טמון ברעיונות פיסיקליים שמנצלים את מתח הפנים של נוזל. מעטה פני נוזל נמצא בשווי משקל רק אם שטח הפנים הוא מינימלי (למשל טיפה כדורית). לקרומים דקים של נוזלים יש שימוש לבעיות במתמטיקה שפתרונן מהווה קושי רב.
ניקח דגם מזכוכית או מפלסטיק של שני מישורים מקבילים ונחברם על ידי שלוש או יותר סיכות המאונכות לכל אחד מהמישורים. נכניס את המתקן לתוך מים עם סבון. כאשר נוציא את המתקן תיווצר מערכת מישורים מאונכים שמחברת את הסיכות. (המישורים הם קרומים דקים - כמו בועות סבון). מישורים אלה מתארים את מערכת הכבישים המינימלית.

הפתרון הפיסיקלי מעלה בדעתנו רעיון שבעזרת הדגמה זו ניתן לבנות רשת כבישים מינימלית לכל מערך ישובים רצוי. בעזרת סיכות או ברגים נסמן על המישורים את הישובים, נטבול את המתקן במי סבון ונקבל את המערך הרצוי.
כמובן שבעזרת טכניקה פיסיקלית זו ניתן למצוא פתרונות מתמטיים גם לבעיות במרחב. למשל, נטבול קוביה הבנויה מחוט מתכת דק בתוך מים וסבון ונסתכל מה קורה. תוצאה שמתקבלת בשיטה זו היא מפתיעה ובלתי חזויה וקשה היה לצפות לה על ידי שיטה מתמטית טהורה.

<u>ביבליוגרפיה</u>

1) ארבל, ב. (1990). אסטרטגיות לפתרון בעיות מתמטיות. האוניברסיטה הפתוחה.

2) Counant R., & Robbins H. (1941). *What is Mathematics?* Oxford University. Press 1994.

3) Coxeten H.S.M. (1961). *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons. 3)