"קשר-חם": ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

הנושא: **"גישה אינטואיטיבית לבניית מושג הגבול"**

הוכן ע"י: תמר זמיר וניצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: בחומר מובאת תוכנית הוראה להקניה אינטואיבית של מושג הגבול, שמומחשת ע"י סדרות אינסופיות. מושג ההתכנסות מומחש גם ע"י דוגמאות גיאומטריות. כמו כן מובאת סקירה היסטורית על התפתחות מושג הגבול.

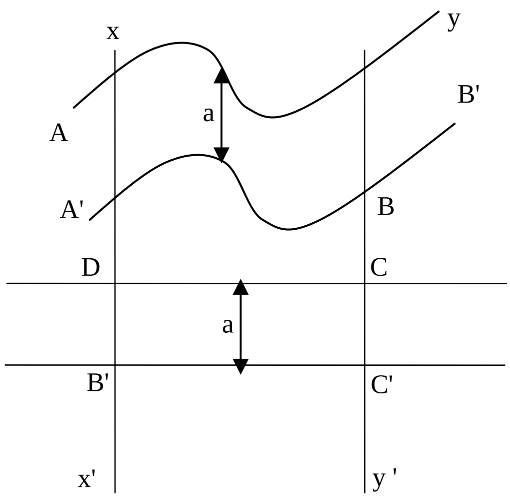
מילות מפתח: אנליזה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו"א), גבול, הסטוריה של המתמטיקה, התכנסות סדרה, טור אינסופי, אכילס והצב.

החומר הוגש במסגרת: "קשר חם" בחיפה, סדנא שניה בשנה"ל תשנ"ד, נובמבר 1993.
"קשר חם" בבאר-שבע, סדנא שניה בשנה"ל תשנ"ד, דצמבר 1993.
"קשר חם" בתל-אביב, סדנא שניה בשנה"ל תשנ"ד, דצמבר 1993.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 10 עמודים.

גישה אינטואיטיבית לבניית מושג הגבול

1. אינטואיציה ומתמטיקה



נבנה שתי רצועות כך:
א. לשני צירים מקבילים xx' , yy' נעביר שני אנכים שהמרחק ביניהם a, הם כמובן מקבילים. נוצרה רצועה אחת שרוחבה a.

ב. ניקח שתי עקומות "מקבילות" כך שהמרחק בין נקודות מתאימות שעליהן הוא a. התקבלה רצועה שניה ברוחב a.

מהו הקשר בין שטחיהן של שתי הרצועות?
במחקר שנערך בקרב תלמידי כיתות יא'-יב' טענו התלמידים שהשטח המפותל יותר, הוא הגדול מבין השניים. זוהי תשובה (שגויה) שניתנה באופן <u>אינטואיטיבי</u> ומיידי על סמך "תחושת בטן".
ניתן בקלות להוכיח שהשטחים הנ"ל שווים בשתי דרכים:
א. ע"י אינטגרציה.
ב. ע"י הפרשי השטחים.

האינטואיציה, כפי שראינו בדוגמא, היא מיידית. היא אינה זקוקה לפיתוח עקבי וממושך של צעד אחר צעד כמו בדרך החשיבה הדדוקטיבית. היא מעלה פתרונות באופן ספונטני וללא היסוס. היא מתרחשת במישרין ואינה זקוקה לתיווכם של מושגים. האינטואיציה היא גלובלית (כוללת), תופסת את הידיעה מבלי לפרק אותה למושגים, כלומר: התוכן מוצג כמכלול שלם. האינטואיציה מציגה "אמת" מובנת מאליה. תחושת וודאות מלווה את הידיעה האינטואיטיבית הנתפשת כאמת שאינה צריכה צידוק כלשהו.

אנו מבחינים, לפי פישבין (1979) בשני סוגים של אינטואיציות:
א. אינטואיציות ראשוניות - אמונות קוגניטיביות המתפתחות מעצמן באדם לפי למידה שיטתית וללא קשר אליה.
ב. אינטואיציות שניוניות המתפתחות כתוצאה מלימוד ואימון שיטתי הכולל התנסות אישית.

מושגים מדעיים המוגדרים באופן פורמלי ואינם נתפשים מלכתחילה כוודאיים, עשויים להגיע בתהליך למידה למצב בו יראה בהם הלומד אמיתות ברורות ומובנות מאליהן. בתהליך הלמידה הופכות הידיעות הפורמליות לאינטואיציות שניוניות.

נעבור כעת אל המושג האינטואיטיבי של הגבול.
בספרות המחקר (ר' רשימה ביבליוגרפית) מוזכרים גורמים אחדים של קושי בהקשר זה. הבעייתיות בהבנת מושג הגבול המתמטי נובעת בין היתר מכך שמושג זה קשור בתהליכים אינסופיים. באופן אינטואיטיבי ראשוני נתפש האינסוף כתהליך שנמשך ללא הגבלה, אולם קיימים בו ניגודים פנימיים אחדים:
א. ניגוד אינטואיטיבי בין העובדה שקטע הוא סופי, לבין העובדה שקטע זה מכיל אינסוף נקודות.
ב. ניגוד אינטואיטיבי בין העובדה שמספר האיברים בטור הוא אינסופי, לבין העובדה שסכום אינסוף איברים יכול להיות לפעמים סופי.

מקור הקונפליקט טמון באינטואיציה הראשונית שלנו לגבי האינסוף. אינטואיציה זו נוצרת כתוצאה מחיוץ (אקסטרפולציה) מהתחום הסופי לתחום האינסופי.
אנו חיים בסביבה סופית, תחושותינו הן סופיות והסכימות השכליות שלנו מתאימות לתהליכים סופיים. לכן עלולות להיווצר טעויות בתהליך החיוץ מהתחום הסופי לתחום האינסופי.
סיבה נוספת היא הסיבה הלשונית. המונח "גבול" שמור ומוכר בשפה הטבעית אך מובנו שונה למדי מהמובן המתמטי של מונח זה. פער בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית קורא לגישור מכוון, זאת על מנת למנוע היווצרות קונפליקטים.
צעדים מעשיים המתבקשים מכל האמור לעיל יוצעו בהמשך.

2. כיצד רצוי להורות את מושג הגבול בבית הספר?

אורטון (1983) סבור שגיל 16 הוא המתאים ללימוד שיטתי ראשון של מושג הגבול אולם את רעיון הגבול רצוי לדעתו להציג לתלמידים, בשלב מוקדם יותר, באופן לא פורמלי בקשר לנושאים אחרים באלגברה ובגיאומטריה - זאת על מנת לפתח אצלם את האינטואיציה (השניונית) בכיוון הנכון.
דוד טול ושלמה וינר (1983) מציעים לבנות את מושג הגבול עם התלמידים במשך שנתיים ואת החלק ההגדרתי לתת רק בסוף הקורס. באופן זה יתגבש הדימוי (Image) של מושג הגבול וישתלב עם הגדרתו הפורמלית.
ההצעה היא להתמקד בתהליך השאיפה אל הגבול ולדחות ככל האפשר את שילוב האינסוף.
בטיפול במושג הגבול יש להתרכז ברמת הדיוק הרצויה של התקרבות אל הגבול. כך יש סיכוי רב יותר שיווצר הדימוי הנכון ותיווצר האינטגרציה בין ההגדרה הפורמלית של מושג הגבול לבין התפיסה שהתפתחה אצל התלמיד לגבי מושג זה.
בהצעה שלנו (ר' סעיף 4) יש ניסיון להביא ל"הצמחה" של מושג הגבול ברוח הסיסמה "הצמחה ולא הצנחה" (ר' גם מובשוביץ-הדר 1991).
כדי לבסס את האינטואיציה של המורים, לגבי מושג הגבול, מצורף נספח על ההתפתחות ההיסטורית של מושג הגבול כבסיס להתפתחותו של החשבון האינפינטסימלי. הוראה שהולכת בעקבות ההתפתחות ההיסטורית יכולה לעיתים לעקוף או להתגבר על הקשיים השונים המתפתחים אצל התלמידים, במקביל למסלול שבו המתמטיקה התגברה על קשיים דומים, במהלך התפתחותה.

3. גבול של סדרה - הגדרה פורמלית

נתונה הסדרה $a_1, a_2, \ldots , a_n$. נאמר כי L הוא הגבול של הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

זוהי ההגדרה הפורמלית של גבול מתמטי של סדרה. על-פי ההצעה שבסעיף הבא ניתן בהדרגה להוביל תלמידים להגדרה זאת. מובן מאליו שלא <u>כל</u> תלמיד ולא <u>בכל</u> כיתה ולא <u>כל</u> מורה יכולים לאמץ לעצמם את האמור להלן. חשוב לכך לשקול את ההצעה בזהירות ולהתאימה לסגנון ההוראה האישי ולמאפיינים המיוחדים של הכיתה בה מדובר.

4. תוכנית הוראה

כדי לתכנן תוכנית הוראה להקניה אינטואיטיבית של מושג הגבול נצא מההגדרה של גבול של סדרה ונפרק אותה למרכיביה על מנת לאפשר לתלמידים לבנות אותה על בסיס אינטואיטיבי ואח"כ נלטש אותה באופן הדרגתי.
בהמשך הדברים מופיעות ההערות למורה במסגרות במקביל לתכנון ההוראה.

<u>תוכנית עבודה בכיתה</u>

4.1 <u>סדרה מהי:</u> סדרה היא פונקציה המוגדרת על המספרים הטבעיים. <u>ערכי</u> הפונקציה הזאת, $f(1), f(2), f(3), \ldots$ מהווים <u>סדרה</u>.
$f(1)$ נקרא האיבר הראשון של הסדרה (נהוג לסמנו ב- a_1, אבל אנחנו נסמנו ב- $a(1)$).
$f(2)$ הוא האיבר השני בסדרה ונסמנו ב- $a(2)$.
$f(n)$ הוא האיבר ה-n-י של הסדרה ונסמנו ב- $a(n)$.

<u>הערות דידקטיות</u>

אנו מציעים להגדיר סדרה באמצעות מושג הפונקציה כי פונקציה זהו מושג המוכר לתלמידים בשלב שבו מציגים בפניהם לראשונה את המושג סדרה.
יש כמובן הבחנה בין שני המושגים.
בהמשך - גישה זאת מקלה את המעבר מגבול של סדרה לגבול של פונקציה.

דוגמאות:

1. מהו ערכם של שלושת האיברים הראשונים של הסדרות הבאות:

א. $a(n) = 2n + 1$.

ב. $a(n) = 5 + \frac{1}{2^n}$.

הדוגמאות מיועדות להבהיר את ההבחנה הנ"ל. אפשר להתחיל בהן ולתת את ההגדרה בהמשך. בעקבות דוגמא 1א אפשר לדון בהבדל
בין: $f(x) = 2x + 1$
לבין: $f(n) = 2n + 1$
במקרה הראשון אין מקום לשאלה - מהו האיבר הבא?

2. מהו ערכו של האיבר העשירי בסדרה:

$a(n) = \frac{1}{n}$.

4.2 <u>מהי המשמעות המילולית של גבול?</u>

במילון מגדירים את הגבול כקצה, שפה או קץ, קו או נקודה המבדילים בין מקום למקום. הכוונה המילונית היא כמובן לגבול כקו הפרדה בין מדינות.

ניתן להשתמש בהמחשה זו ליצירת אנלוגיה עם השאיפה מצד ימין ושמאל לגבול, במובן המתמטי.

4.3 מטייל ישראלי מתכנן טיול אל קו הגבול עם מדינות אויב.
מה אתם יכולים לומר על הטיול הזה - מה הוא יכלול?
מה אפשר לומר על המטייל - איך הוא יתקדם?

התלמידים יתבטאו באופן חופשי על האפשרות להתקרב אל הגבול כרצונו ועל אי-האפשרות לחצות את קו הגבול ולעבור אותו לצד השני (כל זמן שאין שלום...)

עכשיו נחשוב על מטייל ישראלי שמתקדם אל עבר הגבול בקו ישר לפי התבנית $a(n) = \frac{1}{n}$, כאשר $a(n)$ מבטא את המרחק בק"מ הנותר מהגבול n דקות לאחר צאתו לדרך.
לדוגמא: 5 דקות אחרי צאתו לדרך הוא יימצא במרחק $\frac{1}{5}$ ק"מ מהגבול, 10 דקות אחרי צאתו לדרך הוא יימצא במרחק $\frac{1}{10}$ ק"מ מהגבול וכו'.

אנו מסתכלים על הסדרה $a(n) = \frac{1}{n}$ כאשר $n \to \infty$.
דרך האנלוגיה לטיול דמיוני אל הגבול זהו נסיון למצות את האינטואיציה לגבי המושג הגיאוגרפי של גבול כדי לבנות עליה את המושג המתמטי של <u>אפס כגבול של סדרה</u>.

א. מה קורה למרחקו של המטייל מהגבול?

בשלב זה נסתפק בהקניית התחושה שהמרחק הולך וקטן.

ב. כמה זמן עליו ללכת אם הוא רוצה להגיע למרחק של 200 מטר מהגבול?

תשובה: 5 דקות.

ג. מה יקרה אחרי יותר מ- 5 דקות?

מרגע שעברו 5 דקות ואילך המרחק מהגבול ילך ויקטן ויהיה ללא ספק קטן מ- 200 מטר, כל הזמן.

ד. המטייל רוצה להגיע למרחק שלא יעלה על 100 מ' מהגבול. מאיזו דקה <u>ואילך</u> יגיע למצב זה?

ברגע שעברו 10 דקות הוא כבר נמצא במצב הרצוי לו.

ה. לאחר כמה דקות מרגע צאתו יימצא המטייל במרחק של יותר מ- 1 מ' מהגבול? לאחר כמה דקות מרגע צאתו יימצא המטייל במרחק של פחות מ- 1 מ' מהגבול?

במשך 1000 הדקות הראשונות מרחקו מהגבול גדול ממטר, לעומת זאת החל מאותו רגע ועד אינסוף מרחקו קטן ממטר.

ו. נרכז נתונים בטבלה (התלמידים ישלימו) :

מרחק מהגבול (a (n))	זמן בדקות (n)
100 מ'	.
1 מ'	.
1 ס"מ	.
.	100
.	1000
	.
	.
ε	

ניתן לערוך טבלה כמו בדוגמא ולתת ערכים שונים של מרחק מהגבול (ε), או של זמן (n) ולחשב את הערך המתאים.
יש לשים לב למשך הזמן שהמטייל יימצא לפני ואחרי המרחק הנתון מהגבול. הדבר הזה אמור לתת תחושה של הצטופפות ערכי הסדרה ע"י הגבול. בכיתה טובה אפשר להכניס את אפסילון כפרמטר.

ז. האם המטייל "יעבור" את הגבול אם ימשיך כל הזמן להתנהג לפי הכלל האמור?

התשובה היא : לא.
בשלב זה ניתן לסכם (תוך "פזילה" אל הגדרת הגבול), כי את המרחק מהגבול $\frac{1}{n}$ אפשר להקטין כרצוננו, כלומר לעשותו קטן מכל מס' חיובי ולו גם הקטן ביותר. באופן פורמלי, נרשום : $\frac{1}{n} < \varepsilon$ עבור n מספיק גדול.

ח. האם אתם יכולים להציע לו להתקדם אל הגבול לפי כלל אחר?
זיכרו, עליכם להקפיד שהכלל יבטיח :
1. שהוא יוכל להתקרב אל הגבול קרוב כרצונו.
2. שהוא לא יעבור את הגבול.

תשובה : למשל
$$a(n) = \frac{1}{2^n}$$
$a(n) = \frac{1}{n^2}$ וכו'.

4.4 מטייל מצידו השני של הגבול החליט גם הוא להגיע קרוב ככל האפשר אל אותו הגבול.
מטייל זה מתקדם אל עבר הגבול בקו ישר לפי התבנית : $a(n) = \frac{1}{n+2}$, כאשר a (n) הוא המרחק שלו בק"מ מהגבול כעבור n דקות.

נרשום את המרחק של המטייל (מצידו השני של הגבול) מהגבול בעזרת טבלה דומה לזו שעשינו קודם (התלמידים ישלימו אותה) :

מרחק מהגבול (a (n))	זמן בדקות (n)
100 מ'	.
10 מ'	.
1 מ'	
0.1 מ'	.
.	10
.	100
.	1000
.	.
ε	.

האם המטייל הזה יכול להתקרב אל הגבול "כרצונו"?
האם הוא עלול לעבור את הגבול אם ימשיך להתנהג, כל הזמן, לפי הכלל האמור?

שאלה זאת מיועדת להקנות את ההרגשה שאפשר להתקרב אל אותו הגבול מכל צד.

גבול
כביש ⟵ | ⟶ כביש

כדאי כאן לדון עם התלמידים בדרך להביע את העובדה שאנו מתקרבים לגבול משני הצדדים ולהגיע איתם לצורך בשימוש בערך מוחלט, באופן דומה למתואר בסעיף 4.3. רצוי להגיע להכללה ש- $|a(n)| < \varepsilon$ עבור n מספיק גדול.

מכאן אפשר להגיע לכך שבשני המקרים שראינו עד כה עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים זמן מסויים שממנו N (ε) ואילך כל ערכי הסדרה מקיימים $|a(n)| < \varepsilon$.
המילים : "מזמן מסויים ואילך" ניתנות גם כן לתרגום לשפה יותר פורמלית : זוהי פורמליזציה של "סדרה שואפת לגבול" (למקרה המסויים שבו טיפלנו עד כאן).

נסמן את הגבול ב- 0 ואת המיקום ביחס לגבול מצד אחד ב- (+) ומן הצד השני ב- (-) .

גבול
כביש
- 0 +

4.5 מטייל מצידו השני של הגבול מנסה להגיע אל הגבול לפי התבנית : $a(n) = -\frac{2}{n}$, כאשר a (n) הוא המיקום של המטייל .
נרשום טבלה דומה לזו שעשינו קודם (התלמידים ישלימו אותה) :

מרחק מהגבול (a (n))	זמן בדקות (n)
100 מ'	.
10 מ'	.
1 מ'	.
0.1 מ'	.
.	10
.	100
.	1000
.	.
ε	.

4.6 בשני המקרים הקודמים ראינו "התקרבות כרצוננו" אל הגבול מכל צד לחוד. האם תוכלו לחשוב על חוק התקרבות אל <u>אותו</u> הגבול של מישהו שמותר לו לחצות את הקו, למשל קצין או"ם, אך אסור לו לעמוד עליו?

דיון :
- מהו מסלול טיולו של איש האו"ם?
- מה קורה למרחקו מהגבול?

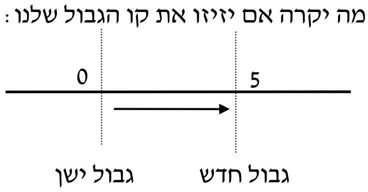
האם תוכלו "לתקן" את ההגדרה שלנו של "שאיפת סדרה אל גבול", כך שהיא תתאים גם לאופן השאיפה של סדרת ההתקדמות שביצע קצין האו"ם?

דוגמאות לתשובות אפשריות :
$a(n) = \frac{(-1)^n}{n}$, $a(n) = \frac{(-1)^n}{2^n}$.
אלה דוגמאות לסדרות "מתנדנדות" השואפות ל- 0 מימין ומשמאל גם יחד. כאן עולה באופן טבעי הצורך בערך מוחלט (שוב : "הצמחה" ולא "הצנחה")

ניתן לערוך שוב טבלה בדומה לדוגמאות הקודמות. ניתן להכליל את ההגדרה כך :
עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שממנו ואילך כל אברי הסדרה מקיימים :
$|a(n)| < \varepsilon$.
כמובן שדיון זה יתבצע רק בכיתות שבהן הצלחנו להגיע להכללה פורמלית בדוגמאות הקודמות.
ברור שיש צורך להדגיש כאן שוב את חשיבות הערך המוחלט.

4.7 עד כאן בעצם הגדרנו את אפס כגבול של סדרה.
האם תוכל לחשוב על סדרה שהגבול שלה
הוא לא אפס אלא 5?

למשל:
מה יקרה אם יזיזו את קו הגבול שלנו:



התוכלו להציע תבנית מתאימה להתקרבות
לגבול במקרה זה?
בהתייחסות לתבנית המוצעת:

דוגמא לתבנית

$$a(n) = 5 + \frac{1}{n}$$

- מאיזה כיוון יתקרב האדם לגבול?

- האם תוכלו להציע תבנית להתקרבות לגבול
מן הצד השני ?

דוגמאות:

$$a(n) = 4 + \frac{n}{n+1} \quad ; \quad a(n) = 5 - \frac{1}{n}$$

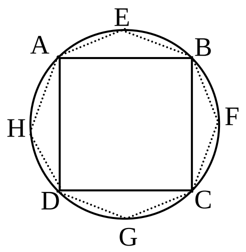
- בעזרת טבלת התאמה מתאימה בין ε
לבין המרחק מהגבול, בדקו אם בכל מקרה
ניתן להתקרב אל הגבול "קרוב כרצוננו".

חשוב, לאור הדיון ובעזרת הטבלה, להגיע עם
התלמידים לביטוי של המרחק מהגבול כ- $|a(n) - L|$ ולהראות שמרחק זה הולך וקטן.
ראוי להדגיש הצטופפות אברי הסדרה
בסביבת הגבול, כלומר להשתדל להגיע
להגדרה שעבור כל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך
שלכל $n > N(\varepsilon)$
מתקיים: $|a(n) - L| < \varepsilon$
או: $\lim\limits_{n \to \infty} a(n) = L$

5. התנסויות מתחומים שונים של המתמטיקה

המחשת מושג הגבול

5.1 <u>שטח העיגול והיקפו של המעגל</u>



קביעת השטח של העיגול וההיקף של המעגל העסיקו את היוונים.
ארכימדס הציג את השיטה הבאה:
ניקח מעגל, נחסום בו ריבוע ABCD. שטח הריבוע ABCD
קטן כמובן משטח העיגול. נחצה את הקשתות AB, BC, CD, DA.
נסמן את נקודות החלוקה ב- E, F, G, H בהתאמה ונחבר את
כל הנקודות, כך שיתקבל מצולע בן שמונה צלעות (AEBFCGDH)
ששטחו גדול משטח הריבוע, אך קטן משטח העיגול.
נמשיך בתהליך זה הלאה, ע"י חציית הקשתות.
האם התהליך יסתיים? (כן/לא) ________________

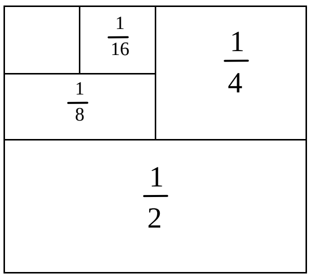
נימוק: ____________________________________

מה אפשר לומר על שטחי המצולעים המתקבלים בתהליך האינסופי הזה?
מה אפשר לומר על היקפי המצולעים המתקבלים בתהליך?

לאמיתו של דבר, השתמש ארכימדס בשיטת ה"סנדוויץ". הוא חישב את שטח העיגול בעזרת סדרת מצולעים משוכללים החוסמים את המעגל וסדרת מצולעים משוכללים החסומים בו. (למעשה הוא הוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ ניתן למצוא מספר n שהוא מספר הצלעות של שני מצולעים משוכללים, אחד חוסם ואחד חסום, כך שההפרש בין שטחי המצולעים לבין שטח העיגול יהיה קטן מ- ε).

המחשת רעיון ההתכנסות

5.2 <u>סכום של טור אינסופי</u>



נתבונן בסרטוט. הוא מתאר את סכום ארבעת האיברים
הראשונים של הסדרה האינסופית: $a(n) = \frac{1}{2^n}$.

לאיזה מספר מתקרב סכום זה ככל שמספר המחוברים גדל?
(ניתן להעזר בסרטוט כדי "לשער" את התשובה).

דוגמא זאת עוזרת להמחיש את הרעיון של התכנסות אל הגבול ע"י העובדה שגם אם מוסיפים ומחברים בלי הפסקה איברים נוספים, הסכום אף פעם לא עולה על 1.

שבר מחזורי אינסופי

5.3 בעית אכילס והצב

אכילס והצב עורכים ביניהם תחרות. אכילס רץ במהירות 10 מטר לשניה, והצב רץ במהירות של 1 מטר לשניה. הצב מתחיל 10 מטר לפני אכילס את המירוץ.
טענה: אכילס לא ישיג לעולם את הצב.
הסבר: נתבונן בתהליך בשלבים, כאשר כל שלב יבטא את המרחק שאכילס צריך לעבור כדי להגיע למיקומו של הצב בשלב הקודם.
כאשר אכילס יגיע למקום בו נמצא הצב בהתחלה (10 מטר מנקודת ההתחלה) יהיה הצב מרוחק מנקודה זו כמטר אחד (שלב 1). כאשר אכילס יעבור את המטר הזה, הצב יהיה כבר במרחק 10 ס"מ משם (שלב 2) וכך הלאה.
נערוך טבלה המתארת את מהלך העניינים המתואר כאן:

שלב	מרחקו של הצב מנקודת ההתחלה (במ׳)	מרחקו של אכילס מנקודת ההתחלה (במ׳)	הזמן הדרוש לשלב זה (בשניות)	הזמן מתחילת התנועה (בשניות)
0	10	0		
1	11	10	1	1
2	11.1	11	$\frac{1}{10}$	$1+\frac{1}{10}$
3	11.11	11.1	$\frac{1}{100}$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$
4	11.111	11.11	$\frac{1}{1000}$	$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$
5	.	.	.	
	.	.	.	
	.	.	.	

בעיה זו מדגישה את השיוויון בין מספר רציונלי, המוצג כמספר עשרוני אינסופי מחזורי, לבין הצגתו כשבר פשוט.
במקרה זה $1.111...=1\frac{1}{9}$

תמיד כשאכילס יגיע למקום בו נמצא הצב, הצב כבר לא יהיה שם, כלומר הצב ימצא תמיד לפני אכילס.
מסקנה: אכילס לא משיג את הצב.
השתכנעת? - מדוע? ______________________________

לפרדוקס זה יש שורשים הסטוריים עמוקים בהתפתחות המספרים העשרוניים המחזוריים וביטויים כמספרים רציונליים.

התרת הפרדוקס

מצד אחד, לפי נתוני הטבלה אנו רואים שהזמן הדרוש לאכילס להדביק את הצב הוא:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+...=1.111...$$

זהו סכום אינסופי ולכן אף פעם זה לא "יגמר", ואכילס לא ישיג את הצב.
מאידך ננסה לפתור את הבעיה כבעיית דרך רגילה:

נסמן ב- x את הזמן בשניות הדרוש לאכילס כדי להשיג את הצב.
המרחק אותו יעבור אכילס עד השיגו את הצב הוא: $10x$.
המרחק אותו יעבור הצב עד שאכילס ישיגו הוא: $1 \bullet x$.
נשווה את המרחקים:

$$10x = x + 10$$
$$9x = 10$$
$$x = \frac{10}{9}$$

כלומר אכילס ישיג את הצב אחר שניה ותשיעית השניה.

שתי התוצאות שנראות כאילו הן סותרות, נובעות בעצם מהשיווין: $1.111...=1\frac{1}{9}$.

6. נספח

<u>התפתחות מושג הגבול - רקע הסטורי קצר</u> [*]

בסוף המאה ה- 17, תחילת המאה ה- 18 "המציאו" ניוטון ולייבניץ את החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי (חדו"א). במשך כ- 100 שנה לאחר מכן, עד למאה ה- 19, הסתייגו המתמטיקאים מהחדו"א והתווכחו ביניהם על הדיוק המתמטי של תורה זו.
בחשבון האינפיניטסימלי של לייבניץ מופיעים "גדלים קטנים לאין-סוף", אך הם אינם מוגדרים. לא הוכח כי ניתן להשמיטם ביחס לגדלים סופיים ולפיכך אין זה מובן מעצמו, כי גדלים כאלו קיימים בכלל, וכי התוצאות המתקבלות בעזרתם הן נכונות.

אצל ניוטון מופיעים המושגים "מנת אחרית" ו"מנת ראשית", שהם לפי הגדרתו "גדלים ומנות של גדלים, אשר במשך זמן סופי כלשהו מתקרבים בהתמדה אל שוויון, ולקראת תום הזמן קרבים זה אל זה בסמוך יותר מכל הפרש נתון, סופם שישתוו". (כוונתו של ניוטון כאן היא, כפי הנראה, זאת: אם נתונים שני גדלים, נאמר Q_1 ו- Q_2 ושניהם משתנים עם הזמן (t), ואם ההפרש בין Q_1 ו- Q_2 פוחת בהתמדה, כך שתוך זמן סופי יתקרבו הגדלים עד שהפרשם יפחת מכל גודל נתון שהוא, אזי יתקיים לבסוף $Q_1 = Q_2$ או $\lim_{t \to \infty} Q_1 = \lim_{t \to \infty} Q_2$

בשנת 1734 פירסם ברקלי (1685-1753) מאמר ביקורתי על יסודות החשבון האינפיניטסימלי שממנו עולות הבעיות הבאות:

א. גדלים קטנים לאינסוף הקרויים דיפרנציאלים, אינפינטסימלים, תוספות מזעריות או מומנטים אינם יכולים להתפש בבירור.
ב. נוהלי החישוב בגדלים אלה מכילים סתירה: תחילה מניחים כי הם שונים מאפס ואחר כך מניחים כי הם שווים לאפס.
ג. גם כאשר מתייחסים למנותיהם של גדלים אלה ומפרשים אותן כמו ניוטון (לעיל) כמנות ראשית או מנות אחרית לא נפתרות בעיות אלו.

בדיונים שנערכו בעקבות ביקורתו של ברקלי, הוצע השימוש במושג הגבול כמוצא מן הקשיים שנתגלו.
רובינס (1707-1751) טען כי מנות האחרית כיתר גדלי האחרית של ניוטון אינם אלא גבולות. באמרו "גבול" התכוון לכך:
"... אנו ... מגדירים גודל אחרית כגבול שאליו יכול להתקרב גודל משתנה, בכל מידת קירבה שהיא, אם כי לעולם לא יוכל להשתוות אליו לחלוטין" - (תרגום לעברית על פי:
Cajori, F. (1919). *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions* in Great Britain from Newton to Woodrouse).

ד'אלמבר (1717-1783) מסביר את מושג הגבול כדלקמן:
"גודל אחד נקרא הגבול של גודל אחר, כאשר הגודל השני יכול להתקרב לגודל הראשון בכל מידה נתונה, קטנה ככל שתהיה, למרות שלעולם לא יעלה על הגודל, שאליו הוא הולך ומתקרב. אי לכך ההפרש בין גודל כזה לגבול אינו ניתן לקביעה לחלוטין".
(תרגום לעברית על פי: D'Alembert, J.L.R. (1751-1772). *Encyclopedia Methodique*).

בהמשך מבהיר ד'לאמבר, כי לא זו בלבד שאין הגודל יכול לעלות על גבולו, אף להגיע ממש אל הגבול אינו יכול. הגדרתו מתלכדת איפוא עם הגדרתו של רובינס.
מושג הגבול של ד'לאמבר לא היה ברור לגמרי. קל להבחין בכך על ידי השוואת המינוח של רובינסו של ד'לאמבר עם המינוח המודרני. במתמטיקה המודרנית אין אנו מדברים על גבול שמשתנה אלא על גבול ערכה של פונקציה, כאשר המשתנה הבלתי תלוי שואף לערך מסויים שיכול להיות גם

[*] נספח זה הוכן על פי: History of Math: Origin and Development of the Calculus I.
תרגום לעברית מקורס של האוניברסיטה הפתוחה באנגליה, 1978.

אינסוף. לפי מושג הגבול של רובינס וד'לאמבר נתפש המשתנה כהולך וגדל או הולך וקטן, ומסיבה זו יכול הגבול להמצא רק בקצות התחום. לפיכך, אם תחום ההשתנות פתוח, קיים גבול, אך אם תחום ההשתנות סגור, לא קיים גבול, כי אז יכול המשתנה להגיע אל קצה תחומו בניגוד להגדרה.

קושי (1789-1857) שהכניס את הסימון lim, קושר בין מושג הפונקציה למושג הגבול:

"בשם משתנה אנו מכנים גודל אשר לדעתנו הוא מסוגל לקבל ערכים שונים בזה אחר זה. לעומת זאת, כל גודל המקבל ערך אחד קבוע ומוגדר נכנה גודל קבוע. כאשר הערכים המיוחסים בזה אחר זה לגודל משתנה מתקרבים בלי סוף לגודל קבוע, עד שלבסוף הם נבדלים ממנו במידה קטנה כרצוננו, נקרא לגודל אחרון זה הגבול של כל האחרים. כך לדוגמא שטח העיגול הוא הגבול אשר אליו מתכנסים שטחי המצולעים המשוכללים החסומים בו, כאשר מספר צלעותיהם גדל יותר ויותר. כמו כן הזווית בין ציר x *לרדיוס וקטור היוצא ממרכזה של היפרבולה אל נקודה שעל העקום ההולכת ומתרחקת מן המרכז, גבולה הוא הזווית שבין ציר כזה והאסימפטוטה. אנו נסמן את הגבול שאליו מתכנס משתנה נתון על ידי הקיצור* lim *שיירשם לפני המשתנה".*

(תרגום לעברית על פי:
Cauchy A.L. (1823). *Resume des Lecons Donnees a LEcole Polytechnique Sur le Calcul Infinitesimal).*

הגדרת הגבול של קושי דומה להגדרות של ד'לאמבר ורובינס למרות שקושי אינו מוציא מכלל אפשרות את השגת הגבול עצמו על ידי המשתנה. קושי עקף את הליקויים שהיו במושג הגבול על ידי קישור של מושג הגבול עם מושג הפונקציה. הוא תגשים זאת באמצעות פירוש חשוב ביותר של המונח "קטן לאינסוף" - *"כאשר ערכים מספריים עוקבים של משתנה מסויים הולכים וקטנים בלי סוף עד שהם פחותים מכל מספר נתון, נאמר כי המשתנה נעשה קטן לאינסוף, או שהינו גודל קטן לאינסוף. גבולו של משתנה כזה הוא אפס".* בעזרת פרוש זה עלה בידי קושי גם להגדיר את המושג רציפות. בהסתמך על פירושו למונח "קטן לאין סוף" הצליח קושי גם להגדיר את הפונקציה הנגזרת כגבול. (פרטים נוספים מעניינים על התפתחות מושג הפונקציה בכלל וגבול של פונקציה בין היתר, אפשר למצוא במאמרו של ישראל קליינר שתורגם לעברית, והופיע בעל"ה 13).

מקורות

1) אופנהיים אסתר, (1986). *השפעת ההתנסות בתהליכי קרוב נומריים על הבנת מושג הגבול.* עבודת גמר לקראת "מוסמך למדעי הרוח" (MA) אוניברסיטת ת"א.

2) ליבוביץ דניאלה, (1977). *חשבון אינפיניטסימלי I*, יחידה 3, אוניברסיטת ת"א.

3) מובשוביץ-הדר נצה (1991). *הצגת משפטים מתמטיים והוכחותיהם - הצמחה לעומת הצנחה.* "על"ה" - עלון למורה המתמטיקה, חוברת 10, 9 .

4) תוחמן ז., קלעי ש.פ., (1978). *חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי*, הוצאת "עבר", ירושלים.

5) Fischbein E., (1987). *Intution in Science and Mathematics, An Education Approach.* Reidel, Dordecht, Holland.

6) Fischbein E., Tirosh, D., & Hess, P., (1979). *The Intution of infinity.* Educational Studies in Mathematics. 10, 3-40.