

"קשר-חם": לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: ניצול משאבים אופטימלי בעזרת תכנון לינארי

הוכן ע"י: משה קוקוס.

תקציר: בחומר מובאת הצעה להוראת השעורים הראשונים בנושא תכנון לינארי. מוצעים חמישה שלבים בפתרון בעיה בתכנון לינארי.

מילות מפתח: תכנון לינארי.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חם" בחיפה, סדנא ראשונה בשנה"ל תש"ן, אוקטובר 1989 ;
"קשר-חם" בת"א, סדנא ראשונה בשנה"ל תש"ן, ינואר 1990.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 19 עמודים.

ניצול משאבים אופטימלי בעזרת תכנון לינארי

(שעורים ראשוניים בנושא)

הקדמה למורה

החומר שלפניך הוכן כדי לסייע בידך בהוראת השעורים הראשוניים בנושא של תכנון לינארי. הוא כתוב בסגנון סוקרטי (בצורת שאלות ותשובות) דבר אשר אמור להנחותך בבניית מהלך הדיון בכיתה.

באופן עקרוני, החומר מורכב מחמש בעיות המוצגות בסעיפים א', ה', ט', י"ב, כ"ה. בסעיף כ"ה מופיעה שאלה אופיינית לשאלות בתכנון לינארי, לקראתה בנויה כל ההקדמה. תלמידים עשויים להבין נושא זה טוב יותר לאחר ההקדמה המוצעת להלן.

חלק ראשון

מפעל מתכת מייצר דיסקיות מפלדה. תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים: יציקה, עיבוד וליטוש. לכל שלב מכונות משלו. משך ההפעלה המירבי של המכונות במחזור ייצור אחד והזמן (בשעות) המוקדש בכל שלב לייצור של ק"ג דיסקיות פלדה, מפורטים בטבלה מס' 1.

שלב מספר	שלב	משך הפעלה מירבי של מכונות במחזור	זמן ייצור ק"ג דיסקיות פלדה
1	יציקה	108 שעות	6 שעות
2	עיבוד	102 שעות	3 שעות
3	ליטוש	60 שעות	4 שעות

טבלה מס' 1

נבדוק כמה ק"ג דיסקיות פלדה יכול בעל המפעל לייצר.

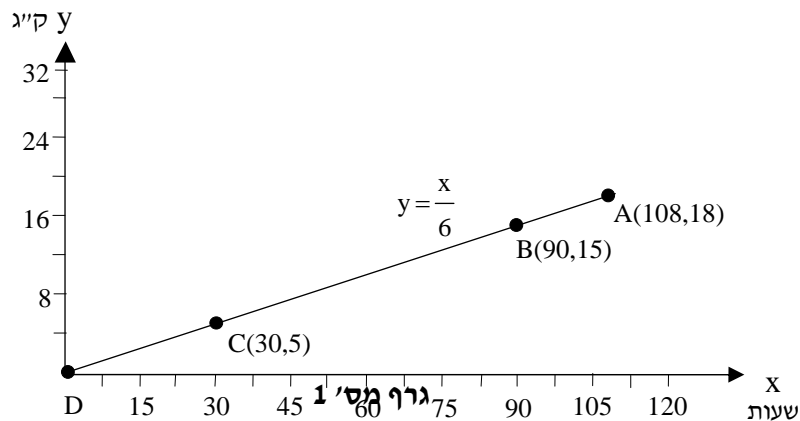
א. בטבלה מס' 1 אנו רואים כי יציקת כל ק"ג דיסקיות פלדה דורשת 6 שעות.

כמה ק"ג יוצקים בשעה? (תשובה: $\frac{1}{6}$ ק"ג), בשעתיים? (תשובה: $\frac{1}{3}$ ק"ג).

מהי המשוואה שתתאר את כמות התוצרת - y ק"ג, כפונקציה של משך הזמן - x שעות,

שהמכונות ליציקת דיסקיות הפלדה עובדות? (תשובה: $y = \frac{x}{6}$, גרף מס' 1).

דיסקיות פלדה - שלב היציקה



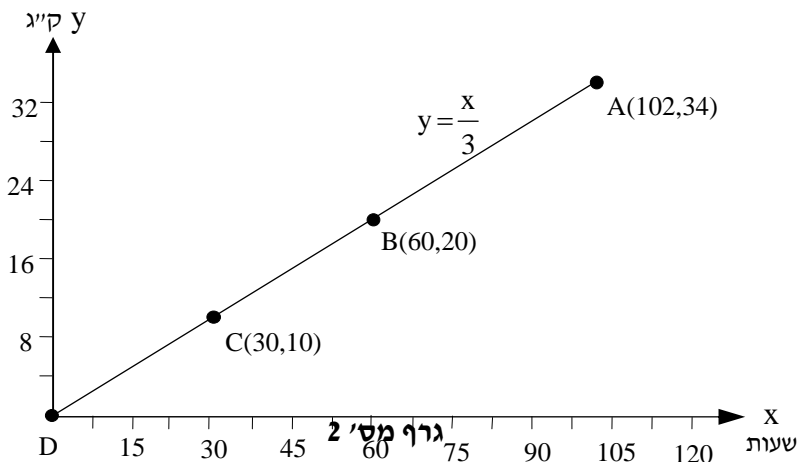
אם ניקח בחשבון שזמן ההפעלה של מכונת היציקה במחזור אחד, מוגבל ל- 108 שעות, כמה ק"ג דיסקיות לכל היותר ניתן לצקת במחזור?

(תשובה: כיוון שמשך הזמן הדרוש ליציקת כל ק"ג הינו שש שעות, וזמן ההפעלה המירבי הינו 108 שעות הרי שהכמות הניתנת ליציקה במחזור אחד הינה 6 : 108 שהיא 18 ק"ג דיסקיות פלדה, נקודה A בגרף מס' 1).
מובן שניתן לצקת במחזור אחד פחות מ- 18 ק"ג. למשל, 15 ק"ג במשך 90 שעות (נקודה B), 5 ק"ג (במשך כמה שעות? נקודה C) ואפשר גם לא לצקת דיסקיות פלדה במחזור (נקודה D). אבל לא ניתן לצקת במחזור אחד יותר מ- 18 ק"ג דיסקיות (מדוע?).

ב. בהמשך פס הייצור, לאחר היציקה, בא שלב העיבוד. לפי טבלה מס' 1, עיבוד כל ק"ג דיסקיות פלדה דורש שלוש שעות. (כמה ק"ג מעבדים בשעה? בשעתיים? בחמש שעות?)
מהי המשוואה שתתאר את כמות דיסקיות הפלדה המעובדות - y ק"ג, כפונקציה של משך הזמן x שעות, שהמכונות לעיבוד הדיסקיות עובדות?

(תשובה: $y = \frac{x}{3}$, גרף מס' 2, מדוע?)

דיסקיות פלדה - שלב העיבוד



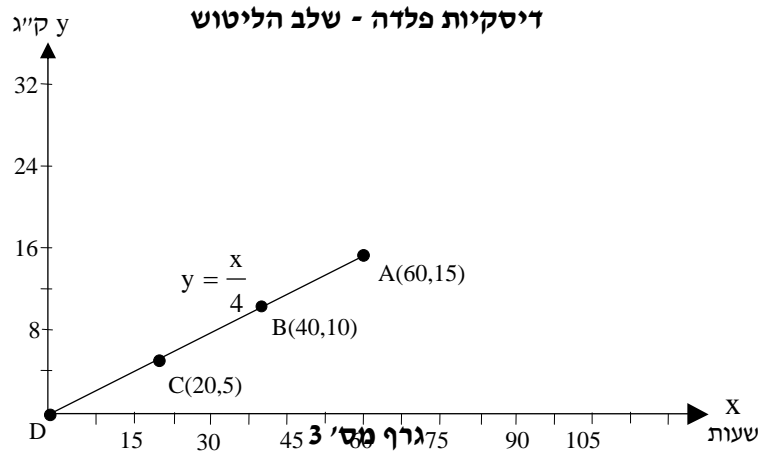
כידוע, משך הזמן המותר לניצול של מכונות העיבוד במחזור ייצור אחד מוגבל ל- 102 שעות (טבלה מס' 1).

כמה ק"ג דיסקיות ניתן לעבד, לכל היותר, בכל מחזור ייצור?
(תשובה: 34 ק"ג, מדוע?)

נקודה A בגרף מס' 2 מתארת את הכמות המירבית של דיסקיות פלדה הניתנות לעיבוד במשך מחזור אחד. ניתן, כמובן, לנצל רק חלק מתוך 102 השעות המותרות ולעבד פחות ק"ג. למשל: ב- 60 שעות יעובדו 20 ק"ג (נקודה B), 10 ק"ג יעובדו במשך 30 שעות (נקודה C). אפשר גם בכלל לא לעבד דיסקיות פלדה במשך המחזור (נקודה D). אבל חשוב לזכור, שיותר מ- 34 ק"ג דיסקיות פלדה לא ניתן לעבד במחזור ייצור אחד משום מגבלת זמן ההפעלה.

ג. השלב השלישי והאחרון ביצור דיסקיות הפלדה הוא הליטוש. לפי טבלה מס' 1, ליטוש כל ק"ג של דיסקיות פלדה דורש ארבע שעות. (כמה ק"ג מלוטשים בשלוש שעות? בעשר שעות?)
מהי המשוואה שתתאר את כמות דיסקיות הפלדה המלוטשות - y ק"ג, כפונקציה של משך זמן עבודת מכונת הליטוש - x שעות?

(תשובה: $y = \frac{x}{4}$, גרף מס' 3, מדוע?)



מכונת הליטוש מוגבלת להפעלה במשך 60 שעות במחזור אחד (ראה טבלה מס' 1). כמה ק"ג דיסקיות פלדה, לכל היותר, ניתן ללטש במחזור? **(תשובה: 15 ק"ג דיסקיות פלדה).**

האם הכרחי ללטש 15 ק"ג דיסקיות פלדה בכל מחזור? **(תשובה: לא! ניתן לנצל פחות מן הזמן המירבי המותר).**

איזה ניצול של זמן מציגה נקודה A על גרף מס' 3? נקודה B? נקודה C? נקודה D? **(תשובה: נקודה A מייצגת ניצול מקסימלי של שעות העבודה של המכונה - 60 שעות, נקודה B מייצגת ניצול פחות מן המקסימום המותר - 40 שעות, נקודה C מייצגת ניצול במשך 20 שעות, ונקודה D מייצגת אי הפעלה של מכונת הליטוש במחזור).** נדגיש שוב כי מפאת מגבלת הזמן לא ניתן ללטש יותר מ- 15 ק"ג דיסקיות פלדה במחזור אחד.

ד. לבעל המפעל מובן מאליו שרק מוצר מוגמר, שעבר את כל שלושת שלבי היצור, הוא מוצר שניתן למכירה. הוא מחליט להפעיל את מכונת היציקה (שלב ייצור ראשון) במלוא הזמן המותר לניצול, ולכן במחזור אחד הוא ייצק 18 ק"ג דיסקיות פלדה. (מדוע? – ר' סעיף א').

נברר לעצמנו מהן התוצאות של החלטתו זאת. בשלב השני, שלב העיבוד, הוא יכול אמנם לעבד לכל היותר 34 ק"ג דיסקיות פלדה במחזור, (גרף מס' 2 - ר' סעיף ב' לעיל). אבל לרשותו רק 18 ק"ג של דיסקיות שיצק בשלב א'. לפיכך, תהיה מכונת העיבוד מושבתת בכל מחזור במשך שעות אחדות. כמה שעות? **(תשובה: 16 ק"ג = 18 ק"ג - 34 ק"ג, לפי 3 שעות לכל ק"ג בשה"כ 48 שעות של השבתה).**

על מנת לסיים את יצור הדיסקיות, הוא חייב ללטש את 18 הק"ג הנ"ל. האם הוא יכול לבצע זאת במחזור אחד?

(תשובה: לא! בסעיף ג' ראינו שהוא מוגבל לליטוש של 15 ק"ג בלבד במחזור. לפיכך, בכל מחזור ייצור, הוא נשאר "תקוע" עם 3 ק"ג של דיסקיות פלדה שייצורן לא הסתיים ולכן אינן ניתנות למכירה ואינן נושאות רווחים).

ה. איזו המלצה אפשר לתת לבעל המפעל, אם מטרתו לקבל בכל מחזור מספר ק"ג הגדול ביותר של דיסקיות מוגמרות? **(תשובה: כדי להרוויח על כל הדיסקיות המיוצרות במחזור, עליו ליצוק רק 15 ק"ג דיסקיות פלדה בכל מחזור).**

האם אז מכונות העיבוד והליטוש ינוצלו באופן מלא? **(תשובה: מכונות העיבוד והליטוש לא יעבדו במלוא תפוקתן כפי שראינו בסעיף ד').**

חלק שני:

בעל המפעל מחליט, לאור הייעוץ שקיבל (מאיתנו...) לעשות במכונות שימוש נוסף על יצור דיסקיות פלדה, על-ידי כך שייצר סוג אחר של דיסקיות, עשויות פליז. משך ההפעלה המירבי של המכונות במחזור ייצור אחד אינו משתנה. הזמן (בשעות) המוקדש לכל שלב ייצור ק"ג דיסקיות פליז, מפורט בטבלה מס' 2.

שלב מספר	שלב	משך הפעלה מירבי של מכונות מחזור	זמן ייצור ק"ג דיסקיות פליז
1	יציקה	108 שעות	5 שעות
2	עיבוד	102 שעות	6 שעות
3	ליטוש	60 שעות	2 שעות

טבלה מס' 2

1. לפי טבלה מס' 2, זמן היציקה של ק"ג דיסקיות פליז הוא 5 שעות. (כמה ק"ג דיסקיות פליז אפשר לצקת ב- 25 שעות? ב- 26 שעות?)

מהי הפונקציה הקושרת את כמות דיסקיות הפליז - y ק"ג, שעברו יציקה במחזור עם משך זמן ההפעלה x שעות, של מכונת היציקה?

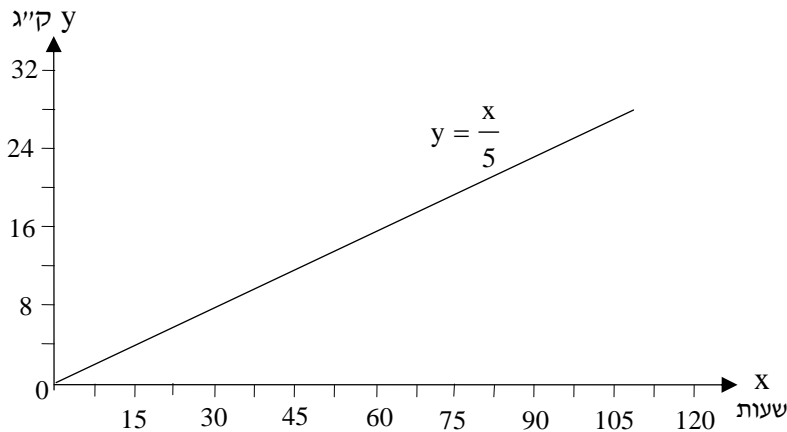
(תשובה: $y = \frac{x}{5}$, גרף מס' 4).

מאחר וזמן היציקה במחזור אחד מוגבל ל- 108 שעות (ר' טבלה מס' 2), כמה ק"ג דיסקיות פליז ניתן לצקת במחזור אחד?

(תשובה: 21.6 ק"ג = 5 : 108).

נא לסמן על גרף מס' 4 את הנקודה המתאימה ב- A.

דיסקיות פליז - שלב היציקה



2. הזמן הדרוש לעיבוד כל ק"ג דיסקיות פליז הוא 5 שעות.

איזו פונקציה מתארת עובדה זאת? (מהן היחידות של x של y ?)

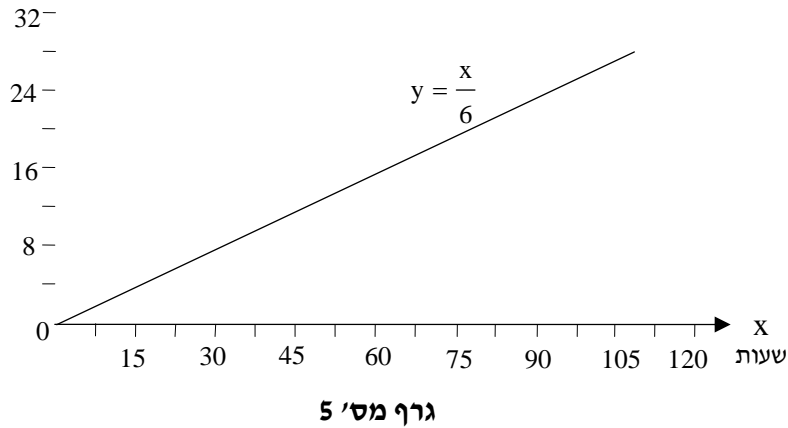
מאחר שמכונת העיבוד מוגבלת ל- 102 שעות במחזור, הרי ברור שניתן לעבד רק 17 ק"ג דיסקיות פליז במחזור אחד.

איזו נקודה על גרף מס' 5 מתאימה לעובדה זו ולמה? (נא לסמן אותה ב- A).

דיסקיות פליז - שלב העיבוד

y ק"ג

"ניצול משאבים אופטימלי בעזרת תכנון לינארי", משה קוקוס
"קשר-חם", המרכז הארצי לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי
הטכניון, חיפה

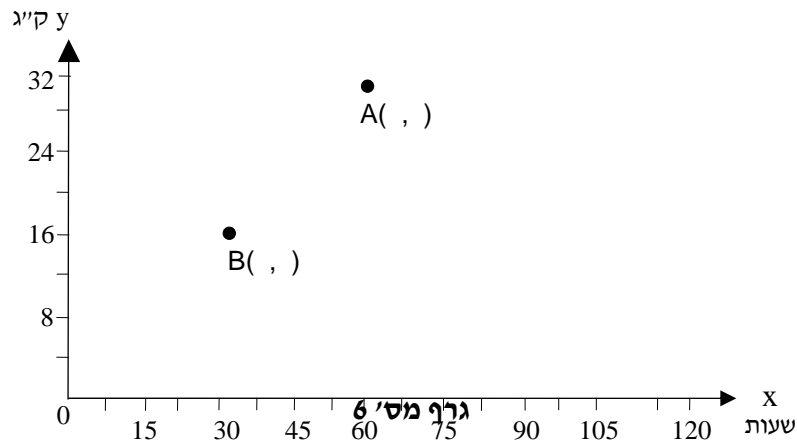


כמות זו הינה קטנה מכמות דיסקיות הפליז שניתן לצקת במחזור אחד. מהי המשמעות של עובדה זאת?
(תשובה: 4.6 ק"ג דיסקיות פליז שנוצקו, יישארו לא גמורים בסוף המחזור).
 יוצא מכך שבעל המפעל מפסיד את הזמן שהמכונות עסקו ביצירתם.

ח. לפי טבלה מס' 2, ליטוש כל ק"ג דיסקיות פליז דורש 2 שעות עבודה.
 מהי המשוואה שתתאר את ניצול זמן מכונת הליטוש - y שעות, כפונקציה של כמות דיסקיות הפליז - x ק"ג, המלוטשות? **(תשובה: $y = \frac{x}{2}$).**

נא לשרטט את גרף הפונקציה במערכת הצירים הנתונה בגרף מס' 6 ולרשום על יד הגרף את משוואתו.

דיסקיות פליז - שלב הליטוש



מכונת הליטוש מותרת לניצול של 60 שעות עבודה בכל מחזור (ר' טבלה מס' 2).
 מהי הכמות המירבית של דיסקיות הפליז שמכונת הליטוש מסוגלת לעבד במחזור אחד?
(תשובה: 30 ק"ג). נא להשלים את הנתונים בנקודה המסומנת ב-A בגרף מס' 6.

מאחר וזהו השלב השלישי בתהליך הייצור, הרי שניתן ללטש רק דיסקיות שעברו את שני השלבים הקודמים.
 כמה ק"ג דיסקיות פליז תלטש המכונה בפועל במשך מחזור אחד (ר' סעיף ז')?
(תשובה: 17 ק"ג).

נא להשלים את נקודה B על גרף מס' 6 כך שתתאים לנתון זה.
 כמה שעות ניצול של מכונת הליטוש מתבזבזות כתוצאה מכך?

(תשובה : 26 שעות = 2 שעות × 13 ק"ג).

נסכם מה מסוגל בעל המפעל לנצל, באם יחליט לייצר במחזור דיסקיות מחומר אחד בלבד.

פליז	פלדה	
17 ק"ג	15 ק"ג	מקסימום ייצור:
23 שעות	18 שעות	מכונת יציקה פנויה:
0 שעות	57 שעות	מכונת עיבוד פנויה:
26 שעות	0 שעות	מכונת ליטוש פנויה:

טבלה מס' 3

בחינת הנתונים בטבלה מס' 3 מלמדת, שניצול המכונות אינו יעיל בשיטה זו. בעוד שייצור מפלדה בלבד גורם להשבתה של מכונת העיבוד למשך 57 שעות, הרי שבייצור מפליז אין לה רגע פנוי. במכונת הליטוש המצב הפוך. (מהו?) ייתכן אולי, שייצור במקביל של דיסקיות משני החומרים יאפשר ניצול יעיל יותר של כל המכונות, להכנת דיסקיות המוכנות למכירה.

חלק שלישי:

נבדוק כמה ק"ג דיסקיות יכול בעל המפעל לייצר באם יחליט לייצר במקביל משני החומרים. נזכיר כי המשאבים העומדים לרשותו בכל מחזור הם: 108 שעות ליציקה, 102 שעות לעיבוד ו- 60 שעות לליטוש הדיסקיות.

ט. נפריד את הדיון לארבעה מקרים שונים כדלקמן:

מקרה ראשון: מחליטים לייצר 2 ק"ג דיסקיות מפלדה והשאר מפליז. מהו משך ניצול המכונות ליצור דיסקיות מפלדה? (תשובה: יציקה: 12 שעות = 6·2, עיבוד: 6 שעות = 3·2, ליטוש: 8 שעות = 4·2).

מהי יתרת השעות האפשרית לניצול בכל מכונה? (ר' טבלה מס' 1). (תשובה: יציקה: 96 שעות = 108 - 12, עיבוד: 96 שעות = 102 - 6, ליטוש: 52 שעות = 60 - 8).

נבדוק עתה מהי הכמות המירבית של דיסקיות פליז שניתן לייצר בזמן שנותר, בכל שלב ושלב לחוד? (ר' טבלה מס' 2).

(תשובה: יציקה: 19.2 ק"ג = $\frac{96}{5}$, עיבוד: 16 ק"ג = $\frac{96}{6}$, ליטוש: 26 ק"ג = $\frac{52}{2}$).

עלינו לזכור שמוצר חייב להיות מוגמר. לכן, בעל המפעל יכול לייצר רק עוד 16 ק"ג דיסקיות פליז בנוסף לדיסקיות הפלדה.

מסקנה: בדרך זאת מייצר המפעל 2 ק"ג דיסקיות מפלדה ו- 16 ק"ג דיסקיות מפליז, והמכונות מנוצלות ביתר יעילות בהשוואה לייצור של סוג אחד בלבד של דיסקיות, כפי שמפורט בטבלה מס' 4.

זמן ייצור מנוצל לייצור 2 ק"ג דיסקיות פלדה ו- 16 ק"ג דיסקיות פליז

סה"כ	פליז	פלדה	
92 שעות	16 x 5	2 x 6	יציקה

"ניצול משאבים אופטימלי בעזרת תכנון לינארי", משה קוקוס
 "קשר-חם", המרכז הארצי לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי
 הטכניון, חיפה

102 שעות	16 x 6	2 x 3	עיבוד
40 שעות	16 x 2	2 x 4	ליטוש

טבלה מס' 4

במקרה זה רק מכונה אחת מנצלת את מלוא הזמן המותר לה. איזו?

מקרה שני: מחליטים לייצר 3 ק"ג דיסקיות פליז ושאר זמן המכונות לייצור דיסקיות מפלדה.

מהו משך הזמן של ניצול המכונות בכל שלב ושלב של יצור 3 ק"ג דיסקיות מפליז? (ר' טבלה מס' 2).

(תשובה: ליציקה: 15 שעות, מפני שליציקת כל ק"ג דיסקיות מפליז דרושות 5 שעות.

לעיבוד: 18 שעות, מפני שלעיבוד כל ק"ג דיסקיות מפליז דרושות 6 שעות.

לליטוש: 6 שעות, מפני שלליטוש כל ק"ג דיסקיות מפליז דרושות 2 שעות).

כמה זמן נותר בלתי מנוצל בכל שלב ושלב?

(תשובה: זמן בלתי מנוצל ליציקה: 93 שעות (15 שעות - 108 שעות).

זמן בלתי מנוצל לעיבוד: 84 שעות (18 שעות - 102 שעות).

זמן בלתי מנוצל לליטוש: 54 שעות (6 שעות - 60 שעות).

מהי הכמות המירבית של דיסקיות פלדה, הניתנת לייצור בכל אחד מן השלבים הנ"ל, בזמן שנותר בלתי מנוצל, כשמייצרים 3 ק"ג דיסקיות מפליז? (ר' טבלה מס' 1).

(תשובה: יציקה: 15.5 ק"ג = 93 : 6

עיבוד: 28 ק"ג = 84 : 3

ליטוש: 13.5 ק"ג = 54 : 4

מהי, אם כך, הכמות המירבית של דיסקיות מפלדה שניתן לייצר (עד גמר שלושת השלבים) בנוסף ל- 3 ק"ג הדיסקיות מפליז? **(תשובה:** 13.5 ק"ג בלבד).

כמו במקרה הראשון גם במקרה זה רק מכונה אחת מנצלת את מלוא הזמן המותר לה במחזור אחד. הפעם זוהי מכונת הליטוש.

מקרה שלישי: מחליטים לייצר דיסקיות מפלדה בלבד, במקרה זה כבר דנו לעיל (ר' סעיף ה'). התוצאה: 15 ק"ג דיסקיות פלדה.

כמה מכונות מנצלות את מלוא הזמן המותר להן?

מקרה רביעי: מחליטים לייצר דיסקיות מפליז בלבד. גם במקרה זה כבר דנו לעיל (ר' סעיף ח'). התוצאה: 17 ק"ג דיסקיות פליז בלבד.

איזו מכונה מנצלת את מלוא הזמן המותר לה במחזור אחד?

י. בכל אחד מארבעת המקרים רק מכונה אחת ניצלה את מלוא הזמן המותר לה במחזור. נשווה את כמות הדיסקיות שיוצרו בכל אחד מן המקרים שתיארנו, בטבלה מס' 5 הבאה:

מקרה ראשון	דיסקיות פלדה	דיסקיות פליז	סה"כ
2 ק"ג	16 ק"ג	18 ק"ג	מקרה ראשון
13.5 ק"ג	3 ק"ג	16.5 ק"ג	מקרה שני
15 ק"ג	0 ק"ג	15 ק"ג	מקרה שלישי
0 ק"ג	17 ק"ג	17 ק"ג	מקרה רביעי

טבלה מס' 5

מן הנתונים המופיעים בטבלה מס' 5 עולה, שבמקרה הראשון הכמות הכוללת של דיסקיות הינה הגדולה ביותר: 18 ק"ג.

האם מטרת בעל המפעל ליצר כמה שיותר דיסקיות? כן, אך בתנאי ששיג רווח מירבי ע"י ניצול מירבי של פוטנציאל המכונות.

יא. טבלה מס' 6 מפרטת את הרווח לכל ק"ג דיסקיות מוגמרות (שעברו את כל שלושת שלבי הייצור).

הרווח לכל ק"ג תוצרת מוגמרת	סוג הדיסקיות
2 ש"ח	פלדה
3 ש"ח	פליז

טבלה מס' 6

לפי נתונים אלה, מהו הפדיון בכל אחד מהמקרים המתוארים בטבלה מס' 5?

הפדיון הכולל	
$2 \times 2 + 16 \times 3 = 52$ ש"ח	מקרה ראשון
$13.5 \times 2 + 3 \times 3 = 36$ ש"ח	מקרה שני
$15 \times 2 = 30$ ש"ח	מקרה שלישי
$17 \times 3 = 51$ ש"ח	מקרה רביעי

טבלה מס' 7

איזה הוא המקרה הרווחי ביותר מבין ארבעת המקרים?

חלק רביעי:

לפי התוצאות שקיבלנו בסעיף י"א, ברור לעין איזו מבין ארבע ההחלטות הינה הרווחית ביותר. כל ארבע האפשרויות שבחנו נבחרו באופן שרירותי. ראינו שכמות מסוג אחד, אותה קבענו שרירותית, גררה בהכרח הגבלה של הכמות מן הסוג השני וכמובן שכך נקבע גם הרווח המתקבל. קיבלנו ארבע תוצאות שונות ומביניהן מצאנו אחת (איזו?) שהיא הרווחית ביותר.

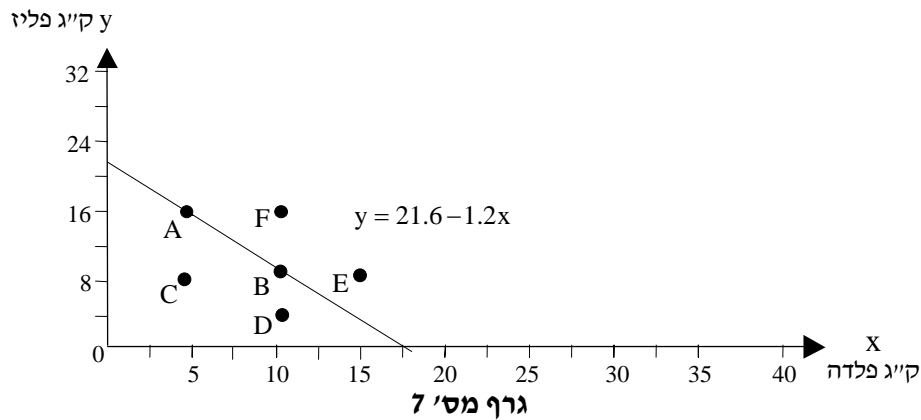
יב. האם אלו הן ארבע האפשרויות היחידות הניתנות לביצוע לפי התנאים שקבענו? **(תשובה: לא.** קיימות אין סוף אפשרויות נוספות ויתכן מאד שביניהן יש אפשרות אחת או אולי יותר מאחת, אשר תהיה רווחית יותר מהאפשרויות שקיבלנו עד כה).
על מנת למצוא את האפשרות הכי טובה עלינו לבחון את כל האפשרויות. אבל יש אינסוף אפשרויות וזה קשה. לכן, ראשית, עלינו למצוא דרך כדי לפרוש את כל האפשרויות למול עינינו, ואז נוכל אולי למצוא את האפשרות הטובה ביותר.

יג. נבדוק את המגבלות העומדות בפנינו.
מגבלה ראשונה היא מגבלת הזמן של מכונת היציקה המוגבלת ל-108 שעות במחזור אחד.
נסמן ב- x את מספר הק"ג של דיסקיות הפלדה שמחליטים לצקת בכל מחזור.
הזמן שידרש לשם כך, בשלב היציקה, הוא $6x$ שעות (מדוע?)
מהי כמות הדיסקיות מפלז - y ק"ג, שניתן לצקת במחזור אחד אם יוצקים בו x ק"ג דיסקיות פלדה?

(תשובה: $y = \frac{108 - 6x}{5}$).

לאחר טיפול אלגברי מתאים נקבל את הפונקציה $y = 21.6 - 1.2x$ המתוארת בגרף מס' 7 ברביע הראשון.

**y ק"ג דיסקיות פלז שיציקתן אפשרית
ל- x ק"ג דיסקיות פלדה**



יד. מה מתארות הנקודות A, B שעל גבי גרף הפונקציה?
(תשובה: הן מתארות את האפשרויות השונות לניצול מירבי של מכונת היציקה, ע"י יצור x ק"ג דיסקיות פלדה ו- y ק"ג דיסקיות פלז ב-108 שעות.
בכל נקודה ונקודה, שעל הגרף, מכונת היציקה מנוצלת 108 שעות בכל מחזור.
למשל: הנקודה A(5, 15.6) מתארת את ייצור 5 ק"ג דיסקיות פלדה בנוסף ל-15.6 ק"ג של דיסקיות פלז. משך הזמן הדרוש לכך הוא: שעות $5 \times 6 + 15.6 \times 5$.

מה הזמן המנוצל בשעות בנקודה B(10, 9.6)?
מה קורה בנקודות אחרות שעל הגרף?

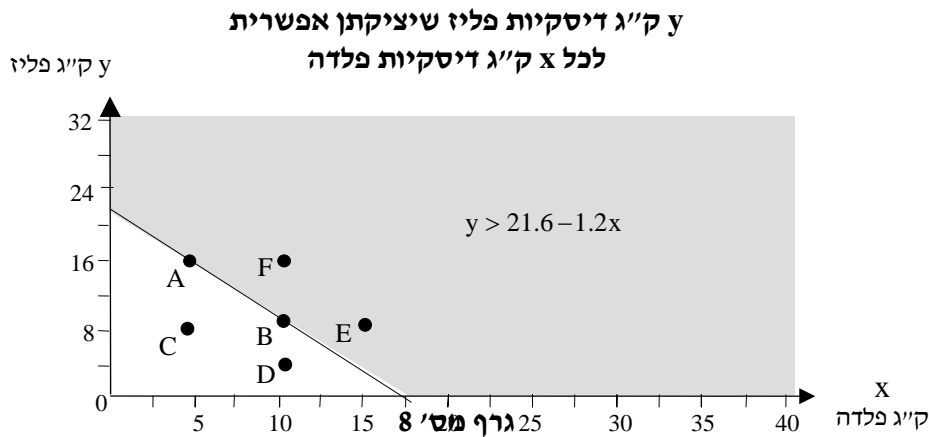
טו. מחוץ לגרף, במערכת הצירים, מסומנות נקודות נוספות: C, D, E, F.
 מה הזמן המנוצל בשעות בנקודה C? וב-D?
(תשובה: נקודה C(5, 8) והזמן המנוצל 70 שעות = 5 × 8 + 6 × 5, נקודה D(10, 4.5) והזמן המנוצל 82.5 שעות = 5 × 4.5 + 6 × 10).

האם הצרוף המתואר ע"י שתי הנקודות C, D אפשרי?
(תשובה: נקודות C ו-D מייצגות צרוף שבו משך הזמן שמכונת היציקה מנוצלת קטן מ- 108 שעות ולכן הוא אפשרי).

מהו משך הזמן המנוצל בשעות בנקודות E ו-F?
(תשובה: נקודה E(15,8) והזמן הנדרש 130 שעות = 5 × 8 + 6 × 15, נקודה F(10,15) והזמן הנדרש 135 שעות = 5 × 15 + 6 × 10).

האם הצרוף המתואר ע"י הנקודות E ו-F אפשרי?
(תשובה: שתי הנקודות E ו-F מייצגות צרוף בלתי אפשרי לפי תנאי הבעיה, מפני שהזמן בו צריכה מכונת היציקה לעבוד חורג מ- 108 השעות המותרות לה במחזור אחד).

ראינו, שהפונקציה המתארת את הניצול המירבי של הזמן המותר ליציקה היא: $y = 21.6 - 1.2x$. מאחר והשעות המנוצלות של מכונת היציקה יכולות להיות 108 או פחות, אולם לא יותר, הרי שהביטוי שיתאר נכון את המגבלה הזאת יהיה $y \leq 21.6 - 1.2x$. הנקודות A, B, C, D נכללות בתחום הזה, והנקודות E, F אינן נכללות בו. נקודות נוספות המתאימות למגבלה זאת נמצאות בתוך איזור שלם בנוסף לאלה הנמצאות על גבי הישר הנתון. (היכן?)
 נצבע את האיזור שהנקודות בו אינן מתאימות למגבלה (גרף מס' 8).

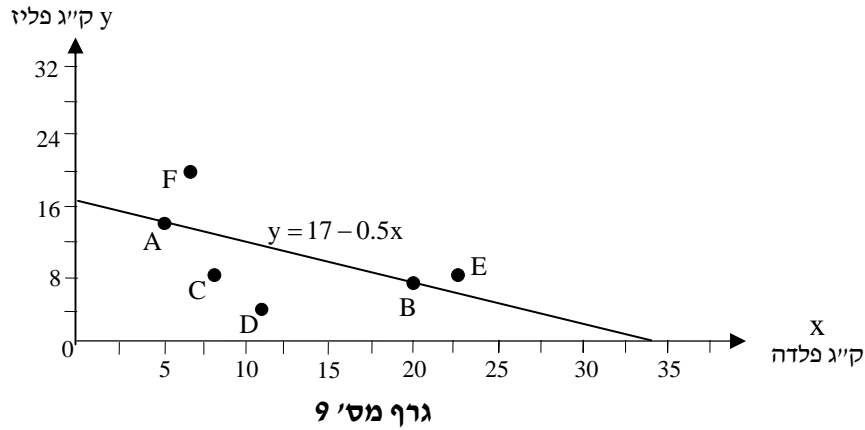


טז. עכשיו נעבור למכונת העיבוד. כאן מגבלת הזמן היא 102 שעות לכל מחזור (טבלה מס' 2).
 נסמן כ-x את כמות דיסקיות הפלדה (בק"ג) המעובדות במחזור אחד.
 מהי הכמות המירבית של הדיסקיות מפליז - y ק"ג, היכולות להיות מעובדות במקביל ל-x הק"ג של דיסקיות הפלדה באותו המחזור?
(תשובה: $y = \frac{102 - 3x}{6}$).

מהו אי-השוויון המפורש שיתאר את כל האפשרויות הבאות בחשבון לפי המגבלה הנ"ל?
(תשובה: $y \leq 17 - 0.5x$).

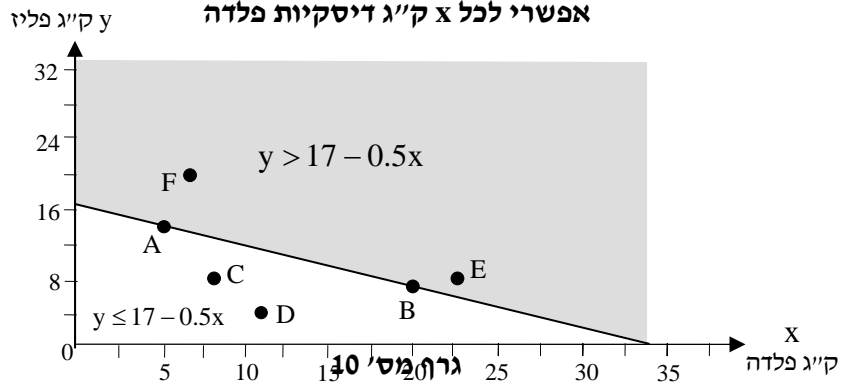
גרף מס' 9 מתאר את הפונקציה $y = 17 - 0.5x$:

y ק"ג דיסקיות פליז שעיבודן אפשרי לכל x ק"ג דיסקיות פלדה



מה מתארת כל נקודה שנמצאת על גבי גרף הפונקציה? למשל נקודות A ו-B ?
(תשובה : כל נקודה מתארת צרוף שונה של עיבוד x ק"ג דיסקיות פלדה ו- y ק"ג דיסקיות פליז בתנאי שניצול זמן מכונת העיבוד הוא מירבי לפי המגבלה של 102 שעות במחזור אחד).
 האם נקודות C ו-D מתארות מצב אפשרי של צרוף עיבוד דיסקיות?
 מהי כמות הזמן המנוצלת בכל אחת מן הנקודות הללו?
(תשובה : הנקודות מתארות צרוף עיבוד אפשרי שבו מנוצלת מכונת העיבוד רק בחלק מהזמן המירבי האפשרי. זמן מנוצל ב-C הוא _____ שעות, ב-D מנוצלות _____ שעות).
 אילו צרופי עיבוד מתוארים בנקודות E ו-F? מהו הזמן הנדרש לעיבוד הדיסקיות בנקודות הללו?
(תשובה : צרופים אלה אינם עומדים במגבלה של 102 שעות עיבוד, בלבד, במחזור אחד. משך הזמן הנדרש לעיבוד הדיסקיות בנקודה E הוא _____ ובנקודה F הוא _____. בשני המקרים חורג הזמן מן המותר).
 נקודות המקיימות את אי-השוויון $y \leq 17 - 0.5x$, שייכות לקבוצת האמת שלו ומתארות מצב אפשרי, ולהיפך. כדי "להוציא" מהתחום הרצוי את השטח המכיל נקודות שאינן שייכות לקבוצת האמת של אי-השוויון, נצבע אזור זה (גרף מס' 10).

y ק"ג דיסקיות פליז שעיבודן אפשרי לכל x ק"ג דיסקיות פלדה



יז. על מנת להימכר, חייבות הדיסקיות הן מהפלדה והן מהפלזי לעבור ליטוש. מכונת הליטוש מוגבלת ל- 60 שעות עבודה במחזור אחד. אם נגדיר כ- x ק"ג את כמות דיסקיות הפלדה שעוברות ליטוש במחזור אחד, מהי כמות דיסקיות הפלזי - y ק"ג, הניתנת לליטוש במחזור אחד במקביל לדיסקיות הפלדה?

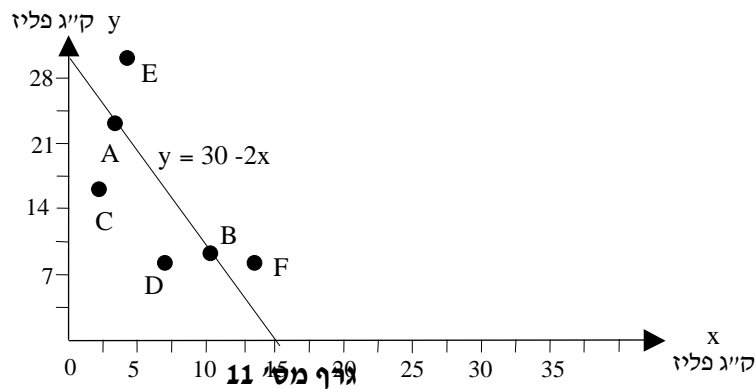
(תשובה: $y = \frac{60-4x}{2}$).

מהו אי-השוויון שיתאר את כל המצבים האפשריים בהתאם למגבלת זמן העבודה המירבי המותר בכל מחזור למכונת הליטוש?

(תשובה: $y \leq 30 - 2x$).

גרף מס' 11 מתאר את הפונקציה $y = 30 - 2x$:

y ק"ג דיסקיות פלזי שליטושן אפשרי לכל x ק"ג דיסקיות פלדה

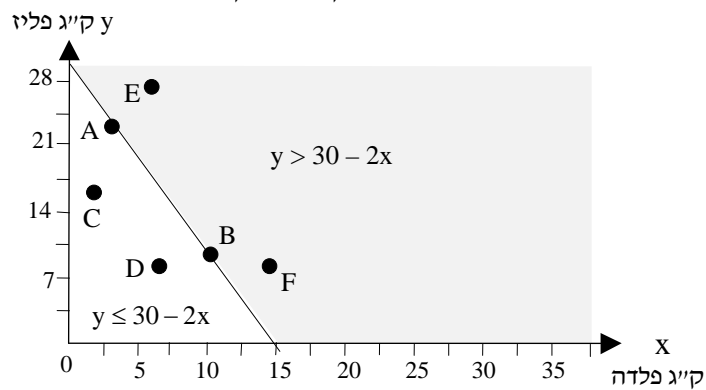


אילו מהנקודות A, B, C, D, E, F שייכות לקבוצת האמת של אי-השוויון $y \leq 30 - 2x$ ואילו לא? מהו הזמן הנדרש לליטוש הדיסקיות בכל אחת מן הנקודות הנ"ל?

(תשובה: נקודות A, B, C, D שייכות לקבוצת האמת. נקודות E, F אינן שייכות לקבוצת האמת. מדוע?)

נצבע את השטח המכיל נקודות שלא שייכות לקבוצת האמת של אי-השוויון (גרף מס' 12).

y ק"ג דיסקיות פלזי שליטושן אפשרי לכל x ק"ג דיסקיות פלדה

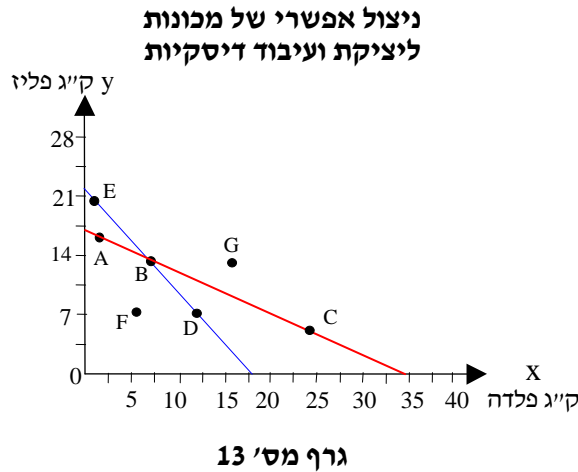


גרף מס' 12

חלק חמישי:

כפי שראינו בסעיפים ה'–ח', כמות המוצר המוגמר, המיוצר במספר שלבים, תלויה במגבלות משך הייצור בשלבים השונים. מסיבה זאת, טבעי שנרצה לראות את מגבלות השלבים השונים על גבי אותה מערכת צירים. כך נוכל למצוא את הנקודות העומדות בכל המגבלות בו זמנית.

ח. לפי סדר השלבים, נתחיל עם תאור מגבלות היציקה והעיבוד על אותה מערכת צירים. בגרף מס' 13 מתוארות שתי הפונקציות: $y = 17 - 0.5x$, $y = 21.6 - 1.2x$. האחת מתארת ניצול אפשרי של מכונת היציקה והשנייה מתארת ניצול אפשרי של מכונת העיבוד. איזו היא כל אחת? נא לרשום את המשוואות המתאימות בגרף מס' 13 במקומות המתאימים (ר' סעיפים י"ג, ט"ז).



מה המשותף לנקודות E, B, D? **(תשובה:** כולן נמצאות על גרף הפונקציה $y = 21.6 - 1.2x$ ומתארות ניצול מקסימלי של מכונת היציקה. ר' סעיף י"ג).
 מה המשותף לנקודות C ו-G? **(תשובה:** הן נמצאות מחוץ (מעל) גרף הפונקציה הנ"ל, ומציגות מצב בלתי אפשרי לפי מגבלות מכונת היציקה. ר' סעיף ט"ו).
 האם ניצול מכונת היציקה, כפי שמתואר בנקודה F, אפשרי?
(תשובה: הנקודה מתארת ניצול אפשרי, אך פחות מן המירבי המותר להפעלה במחזור).

בגרף מס' 14 נצבע את השטח המכיל נקודות המייצגות ניצול בלתי אפשרי של מכונת היציקה.



איזה סוג נקודות מכיל השטח שנתחם ע"י הגרפים של הפונקציות וצירי השעורים, כלומר השטח שאינו צבוע? **(תשובה:** בשטח שנותר בלתי צבוע נמצאות כל הנקודות ורק נקודות המייצגות ניצול אפשרי, אך לא מירבי, של מכונת היציקה. ר' סעיף ט"ו).

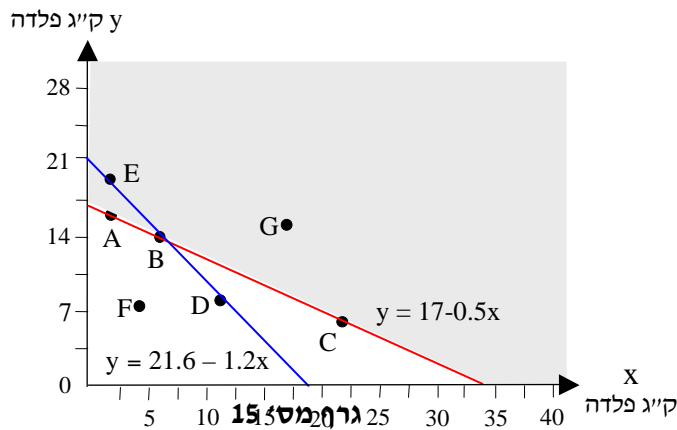
יט. מה המשותף לנקודות A, B, C בגרף מס' 13?
(תשובה: כולן נמצאות על גרף הפונקציה $y = 17 - 0.5x$, לכן מתארות ניצול מירבי של מכונת העיבוד. ר' סעיף ט"ז).

מה המשותף לנקודות E ו-G בגרף מס' 13?
(תשובה: הן מתארות ניצול יותר מהמירבי המותר למכונת העיבוד במשך מחזור אחד. לכן הצירוף המתואר על ידן הוא בלתי אפשרי. ר' סעיף ט"ז).

מה המשותף לנקודות D ו-F בהקשר למכונת העיבוד?
(תשובה: הן מייצגות ניצול פחות מן המירבי המותר למכונת העיבוד במחזור. לכן הצירוף המתואר על ידן הוא בר-ביצוע. ר' סעיף ט"ז).

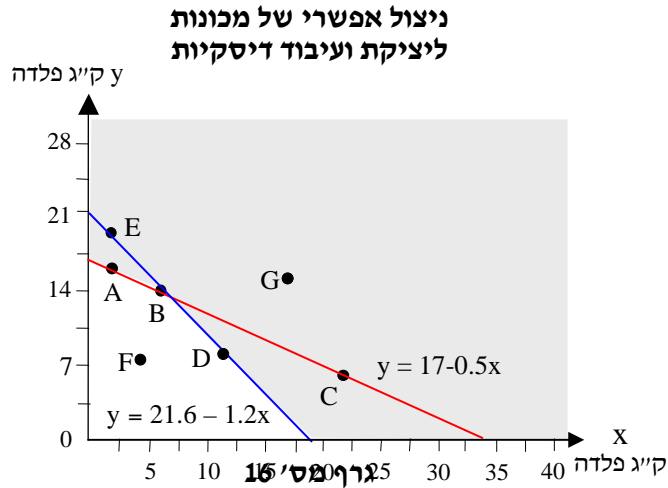
בגרף מס' 15 נצבע את השטח המכיל נקודות המייצגות ניצול בלתי אפשרי של מכונת העיבוד.

ניצול אפשרי של המכונה לעיבוד דיסקיות



אילו נקודות מכיל החלק הבלתי צבוע הנתחם ע"י צירי השיעורים וגרף הפונקציה $y = 17 - 0.5x$? **(תשובה:** החלק הבלתי צבוע מכיל את כל הנקודות המייצגות ניצול אפשרי, אך לא מירבי של מכונת העיבוד, ורק נקודות כאלה. ר' סעיף ט"ז).

כ. כעת נאחד את גרף מס' 14 וגרף מס' 15. בגרף מס' 16 נצבע את השטח המכיל נקודות המייצגות ניצול בלתי אפשרי של מכונת היציקה או של מכונת העיבוד.



מה המשותף לכל הנקודות המוכלות בשטח הנתחם ע"י צירי השיעורים וגרף הפונקציות:
 $y = 17 - 0.5x$ ו- $y = 21.6 - 1.2x$ (השטח שאינו צבוע)?
(תשובה: כל הנקודות בשטח הבלתי צבוע, ורק הן, מייצגות ניצול אפשרי של שתי המכונות, הן של מכונת העיבוד והן של מכונת היציקה).

מה המשותף לנקודות A ו- B?
(תשובה: הן מייצגות צרוף אשר בו יש ניצול מירבי של מכונת העיבוד).

מה המשותף לנקודות B ו- D?
(תשובה: הן מייצגות צרוף אשר בו יש ניצול מירבי של מכונת היציקה).

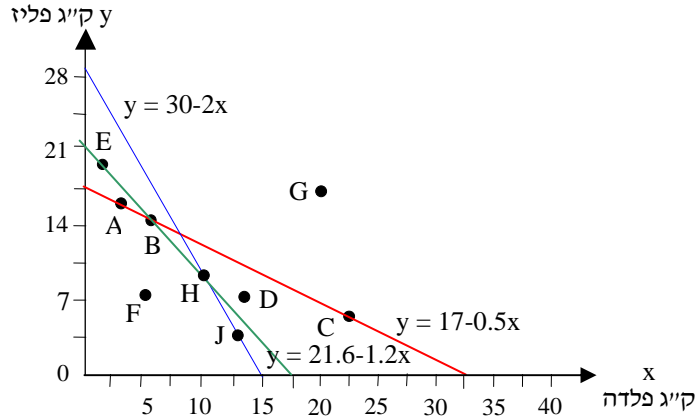
איזו נקודה מתארת צרוף אשר מאפשר עיבוד של כל תוצרי היציקה תוך ניצול הזמן המירבי המותר לעיבוד במחזור אחד?
(תשובה: נקודה B המשותפת לשני הגרפים הנ"ל. פרושו של דבר, שנקודה B מתארת צרוף כל הכמות הנוצקת, עוברת עיבוד ובנוסף לכך שתי המכונות מנוצלות במקסימום הזמן. מכונת היציקה מנוצלת במשך 108 שעות במחזור אחד ומכונת העיבוד 102 שעות במחזור אחד).

מהם שיעורי הנקודה B? (כמות דיסקיות פלדה x, כמות דיסקיות פליז y).
(תשובה: על מנת למצוא את שיעורי הנקודה יש לפתור את מערכת שתי המשוואות:
 $y = 17 - 0.5x$ ו- $y = 21.6 - 1.2x$. הפתרון הוא $x = 6.57$ ו- $y = 13.71$.
 לכן, שיעורי הנקודה הם: (B(6.57, 13.71).

כמה שעות מנוצלת מכונת היציקה בנקודה זאת וכמה מכונת העיבוד?
 האם הניצול הוא המקסימלי?
(תשובה: מכונת היציקה מנוצלת 108 שעות, שזו הכמות המירבית המותרת. מכונת העיבוד מנוצלת 102 שעות, שזו הכמות המירבית המותרת).

כא. נוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה $y = 30 - 2x$. כפי שראינו בסעיף י"ז, כל נקודה עליו מתארת צרוף ליטוש של דיסקיות פלדה ופליז תוך ניצול מירבי של הזמן המותר למכונת הליטוש (ר' גרף מס' 17).

**ניצול אפשרי של מכונות
ליציקת, עיבוד וליטוש דיסקיות**



גרף מס' 17

מהם שיעורי הנקודה H אשר נמצאת בחיתוך הגרפים של הפונקציות:
 $y = 30 - 2x$ ו- $y = 21.6 - 1.2x$?

(תשובה: פתרון מערכת שתי המשוואות ע"י השוואת ערכי y שלהן נותן את שיעורי הנקודה H: (10.5, 9).

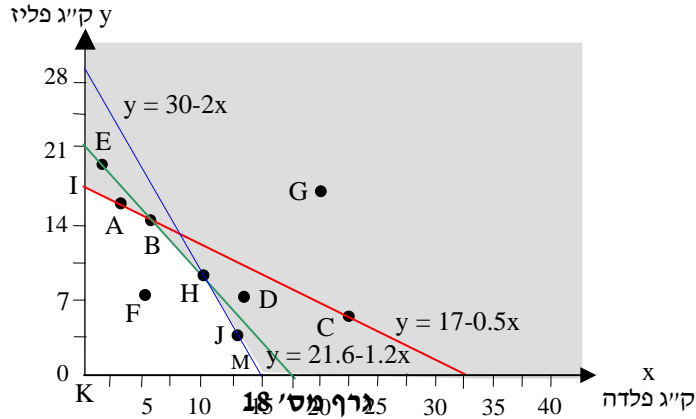
מה משותף לנקודות A, B, F, H, J ?
(תשובה: כולן מייצגות ניצול אפשרי של מכונת הליטוש בד בבד עם ניצול אפשרי של יתר שתי המכונות).

במה שונה נקודה H מיתר ארבע הנקודות A, B, F, J.
(תשובה: בנקודה H ניצול מכונת הליטוש הוא המירבי המותר, בעוד שב- A, B, F הניצול הינו פחות מן המותר, שפרושו השבתה חלקית של מכונת הליטוש בכל מחזור. בנקודה J הניצול של מכונת הליטוש אמנם מירבי אבל הניצול של המכונות האחרות איננו מירבי ואז הן מושבתות בחלק מהזמן).

מה המשותף לנקודות D ו- C בהקשר למכונת הליטוש?
(תשובה: הן מייצגות צרוף אשר מחייב ניצול מכונת הליטוש מעל המותר במחזור אחד).

כב. בגרף מס' 18 נצבע את השטח המכיל נקודות המייצגות צרופים בלתי אפשריים לגבי מכונה כלשהי בשרשרת היצור. כתוצאה מכך נותר בלתי צבוע הפוליגון IBHMK. (הנקודות K, M, I נמצאות על הצירים).

צרופים אופטימלים של מכונות ליציקת, עיבוד וליטוש דיסקיות



מה משותף לכל הנקודות הכלולות בשטח הפוליגון IBHMK (כולל הצלעות)?
(תשובה: כמות דיסקיות הפלדה והפליז המיוצרות בכל נקודה בשטח זה יכולות לעבור את כל שלושת שלבי היצור ולהימכר).

במה שונות הנקודות B ו-H מן הנקודות הנמצאות בתוך הפוליגון (לא על הצלעות)?
(תשובה: הן מייצגות ניצול מירבי של שתיים מתוך שלוש המכונות).
 מסיבה זאת, בנקודות B ו-H יזכה בעל המפעל לתמורה מירבית בעבור פוטנציאל המשאבים שלו. בכל נקודה אחרת בפוליגון שתיים מן המכונות מופעלות בפחות מהפוטנציאל האפשרי שלהן.

כ.ג. כזכור, הרווח ממכירת ק"ג דיסקיות פלדה הוא 2 ש"ח והרווח ממכירת ק"ג דיסקיות פליו הוא 3 ש"ח (ר' טבלה מס' 6).

נסמן ב-x את הכמות (בק"ג) של דיסקיות הפלדה שנמכרות וב-y את הכמות (בק"ג) של דיסקיות הפליו שנמכרות.

מהי הפונקציה Z, המתארת את רווח המפעל ממכירת שני סוגי הדיסקיות?
(תשובה: הפונקציה היא: $Z = 2x + 3y$).

מהו הרווח בכל אחת מן הנקודות הבאות: A, B, H, M, F, K, I ?

הרווח (Z) בש"ח	הנקודה
$2.5 \times 2 + 15.75 \times 3 = 52.25$	A(2.5, 15.75)
$6.57 \times 2 + 13.71 \times 3 = 54.27$	B(6.57, 13.71)
$5 \times 2 + 8 \times 3 = 34$	F(5, 8)
$15 \times 2 + 0 \times 3 = 30$	M(15, 0)
$10.5 \times 2 + 9 \times 3 = 48$	H(10.5, 9)
$0 \times 2 + 17 \times 3 = 51$	I(0, 17)
$0 \times 2 + 0 \times 3 = 0$	K(0, 0)

מה שואף בעל המפעל להשיג בפונקציה זאת?
(תשובה: $\max(2x+3y)$).

הפונקציה Z נקראת בדרך כלל פונקציית המטרה.
 מהי הנקודה הרווחית ביותר?
 כמה ק"ג מכל סוג כדאי לו לייצר לשם קבלת רווח מירבי?
(תשובה: נקודה B היא הרווחית ביותר. הרווח בה הוא 54.27 ש"ח למחזור. הייצור כולל 6.57 ק"ג דיסקיות מפלדה ו- 13.71 ק"ג דיסקיות מפליז במחזור אחד).

כד. לסיכום: קבוצת הנקודות, המתארות ניצול אפשרי של מכוונת הייצור, בכפוף למגבלותיהן השונות, נמצאות בתחום הפוליגון, כולל צלעותיו, המתואר ע"י אי-השוויונים:

$$y \geq 0, x \geq 0, y \leq 30 - 2x, y \leq 17 - 0.5x, y \leq 21.6 - 1.2x$$

מדוע נוספו שני אי השוויונים האחרונים?
(תשובה: אי השוויונים $x \geq 0$ ו- $y \geq 0$ מתארים את הדרישה הבסיסית המעשית שמספר הק"ג המיוצרים יהיה חיובי או לפחות לא יהיה שלילי).

כה. הבעיה, שפתרנו בסעיפים א'-כ"ד, היא בעיה אופיינית לתחום שנקרא "תכנון לינארי". נרשום אותה בשלמותה:
 מפעל מתכת מייצר דיסקיות משני סוגי חומרים: פלדה ופליז. תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים: יציקה, עיבוד וליטוש. לכל שלב מכוונת משלו.
 הטבלה הבאה מתארת את משך הזמן (בשעות) המוקדש בכל שלב לייצור של ק"ג דיסקיות מכל אחד משני הסוגים ואת משך ההפעלה המירבי המותר לכל סוג מכוונת במשך מחזור אחד.

שלב מספר	שלב	משך הפעלה מירבי של המכוונת במחזור ייצור אחד	זמן ייצור ק"ג של דיסקיות	
			פלדה	פליז
1	יציקה	108 שעות	6 שעות	5 שעות
2	עיבוד	102 שעות	3 שעות	6 שעות
3	ליטוש	60 שעות	4 שעות	2 שעות

הרווח לכל ק"ג דיסקיות פלדה 2 ש"ח. הרווח לכל ק"ג דיסקיות פליז 3 ש"ח.

כמה ק"ג דיסקיות מכל סוג כדאי לבעל המפעל לייצר לשם קבלת רווח מירבי?

פתרון: נסמן ב- x את הכמות בק"ג של דיסקיות הפלדה המיוצרות במחזור וב- y את כמות דיסקיות הפליז המיוצרות במקביל באותו מחזור.
 אי-השוויונים המתארים את הצרופים האפשריים לייצור בכל שלב ושלב הינם:

1. שלב היציקה: $6x + 5y \leq 108$ כלומר $y \leq 21.6 - 1.2x$

2. שלב העיבוד: $3x + 6y \leq 102$ כלומר $y \leq 17 - 0.5x$

3. שלב הליטוש: $4x + 2y \leq 60$ כלומר $y \leq 30 - 2x$

4. אילוצי המציאות: $x \geq 0, y \geq 0$

פונקציית המטרה היא $Z = 2x + 3y$ ואנחנו מחפשים $\max(Z) = \max(2x+3y)$
 הנקודות היחידות המועמדות לתאר אפשרות של רווח מקסימלי הן קדקודי הפוליגון הנתחם על-ידי הגרפים של הפונקציות לעיל, כלומר על ידי צלעות המחומש IBHMK (ר' גרף מס' 18).
 ככל שננוע ימינה ומעלה בתוך הצורה הרי שהרווח יהיה רב יותר.

הרווח המקסימלי נמצא בנקודה B. הרווח הוא 54.27 ש"ח לכל מחזור. כמות הדיסקיות המיוצרת במחזור ומאפשרת רווח זה הינה 6.57 ק"ג דיסקיות מפלדה ו- 13.71 ק"ג דיסקיות מפליז. (ר' סעיף כ"ג).
רווח מקסימלי זה הוא הטוב ביותר שניתן להשיג בתנאים אלה. מקובל לקרוא לרווח מקסימלי באילוצים ידועים, בשם רווח אופטימלי.

לסכום - למורים

נסו לעבור על חמשת השלבים שתוארו לעיל בבעיה אחרת. אם חוזרים פעמים אחדות בכתה על התהליך, התלמידים עשויים להגיע להבנה מעמיקה של התפקיד המיוחד של קדקודי הפוליגון בפתרון בעיות בתכנון לינארי, ואז הפתרון מתבצע לא בצורה מכנית, אלא על בסיס ההגיון המלווה אותו.