הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״: לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: דרכים שונות לפתרון משוואה טריגונומטרית

הוכן ע״י: יפים כץ.

תקציר: בחומר מובאות שמונה דרכים לפתרון משוואה טריגונומטרית מהצורה: $a \sin kx + b \cos kx = c$.

מילות מפתח: טריגונומטריה, משוואה טריגונומטרית, זהות טריגונומטרית, וקטורים, מכפלה סקלרית.

החומר הוגש במסגרת: ״קשר-חם״ בחיפה, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ה, נובמבר 1994.
״קשר-חם״ בתל-אביב, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ה, דצמבר 1994.
״קשר-חם״ בבאר-שבע, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ה, דצמבר 1994.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

דרכים שונות לפתרון משוואה טריגונומטרית

קיימות מספר דרכים לפתרון משוואה מהצורה: $a\ \sin kx + b\ \cos kx = c$ כאשר: $a,\ b,\ c\ \in\ R$

נדגים אותן לגבי המשוואה: $3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3$

<u>דרך א' (בעזרת זווית נוספת):</u>

נחלק את שני אגפי המשוואה באחד המקדמים a או b (במשוואה הנתונה נחלק ב- 3).

$$\mathbf{3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3}$$

$$\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 2x = 1$$

היות ו: $\frac{\sqrt{3}}{3} = tg30°$ נקבל: $\sin 2x + tg30°\cos 2x = 1$

נציב $tg30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°}$, נכפול ב- $\cos 30°$ ונקבל: $\sin 2x \cdot \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos 2x = \cos 30°$

מכאן: $\sin(2x + 30°) = \cos 30°$

היות ו: $\cos 30° = \sin 60°$ נקבל: $\sin(2x + 30°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

שתי האפשרויות המתאימות הן:

$2x + 30° = 120° + 360°n$	$2x + 30° = 60° + 360°n$
$2x = 90° + 360°n$	$2x = 30° + 360°n$
$x_2 = 45° + 180°n$	$x_1 = 15° + 180°n$
$n \in Z$	$n \in Z$

<u>דרך ב' (בעזרת זווית נוספת):</u>

נחלק את שני אגפי המשוואה $a\ \sin kx + b\ \cos kx = c$ בשורש של סכום ריבועי המקדמים.

במשוואה הנתונה: $\mathbf{3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3}$

$a = 3$, $b = \sqrt{3}$ ולכן סכום הריבועים: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

לאחר חילוק ב- $2\sqrt{3}$ מקבלים: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

נשים לב: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$

נסמן: $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, כאשר $\alpha = 60°$.

כלומר: $\sin 60° \cdot \sin 2x + \cos 60° \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

מכאן:

$$\cos(2x-60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2x-60=\pm 30°+360°n$$

האפשרויות המתאימות הן:

$2x-60°=-30°+360°n$	$2x-60°=30°+360°n$
$2x=30°+360°n$	$2x=90°+360°n$
$x_2=15°+180°n$	$x_1=45°+180°n$
$n\in Z$	$n\in Z$

<u>דרך ג' (בעזרת זהויות טריגונומטריות):</u>

נשתמש בזהויות: $\sin 2x=2\sin x\cos x$; $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$; $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\mathbf{3\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=3}$$
$$3\cdot 2\sin x\cos x+\sqrt{3}(\cos^2 x-\sin^2 x)=3\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$(3+\sqrt{3})\sin^2 x-6\sin x\cos x+(3-\sqrt{3})\cos^2 x=0$$

נחלק את שני האגפים ב- $\sqrt{3}\cos^2 x$ $(\cos x\neq 0)$ ונקבל: $(\sqrt{3}+1)tg^2x-2\sqrt{3}tgx+(\sqrt{3}-1)=0$

נסמן: $tgx=t$ ונקבל: $(\sqrt{3}+1)t^2-2\sqrt{3}t+(\sqrt{3}-1)=0$

הפתרונות:

$t_2=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$	$t_1=1$
$tgx=2-\sqrt{3}$	$tgx=1$
$x_2=15°+180°n$	$x_1=45°+180°n$
$n\in Z$	$n\in Z$

<u>דרך ד' (בעזרת זהויות טריגונומטריות):</u>

נשתמש בזהויות: $\cos 2x=\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$; $\sin 2x=\frac{2tgx}{1+tg^2x}$

$$\mathbf{3\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=3}$$
$$3\cdot\frac{2tgx}{1+tg^2x}+\frac{\sqrt{3}(1-tg^2x)}{1+tg^2x}=3$$

נסמן: $tgx=t$, ונכפול ב- $1+t^2$ ונקבל: $6t+\sqrt{3}(1-t^2)=3(1+t^2)$

$$(3+\sqrt{3})t^2-6t+(3-\sqrt{3})=0$$

נחלק ב- $\sqrt{3}$ ונקבל המשך כמו בדרך ג': $(\sqrt{3}+1)t^2-2\sqrt{3}t+(\sqrt{3}-1)=0$

הפתרונות:

$t_2 = 2-\sqrt{3}$	$t_1 = 1$
$tgx = 2-\sqrt{3}$	$tgx = 1$
$x_2 = 15° + 180°n$	$x_1 = 45° + 180°n$
$n \in Z$	$n \in Z$

הערה: בזהויות הנ"ל תחום ההגדרה הוא: $\cos x \neq 0$

$x \neq 90° + 180°n$

כלומר אנחנו יכולים לאבד פתרונות מהצורה: $x = 90° + 180°n$ ולכן יש לבדוק האם אלו הם פתרונות של המשוואה.

לשם כך מציבים במשוואה המקורית: $x = 90° + 180°n$

$$3\sin[2(90°+180°n)] + \sqrt{3}\cos[2(90°+180°n)] = 3$$

מתקבל: $3 \cdot 0 + \sqrt{3}\cdot(-1) = 3$

$-\sqrt{3} = 3$

אבל $-\sqrt{3} \neq 3$

קיבלנו כי $x = 90° + 180°n$ אינו פתרון של המשוואה הנתונה, ולכן, לא איבדנו פתרון.

<u>דרך ה' (בעזרת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה)</u>:

$$\mathbf{3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3}$$

$$(3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 = 3^2$$

$$9\sin^2 2x + 6\sqrt{3}\cos 2x \cdot \sin 2x + 3\cos^2 2x = 9$$

$$9(\sin^2 2x - 1) + 6\sqrt{3}\cos 2x \cdot \sin 2x + 3\cos^2 2x = 0$$

נציב: $\sin^2 2x - 1 = -\cos^2 2x$ ונקבל: $6\sqrt{3}\cos 2x \cdot \sin 2x - 6\cos^2 2x = 0$

$$6\cos 2x(\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

שתי האפשרויות הן:

$\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0$

נחלק את שני האגפים ב- $\cos 2x$ $(\cos 2x \neq 0)$

$\sqrt{3}\,tg2x - 1 = 0$

$tg2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$2x = 30° + 180°n$

$x_2 = 15° + 90°n$

$n \in Z$

$\cos 2x = 0$

$2x = 90° + 180°n$

$x_1 = 45° + 90°n$

$n \in Z$

יש לבדוק אם כתוצאה מההעלאה בריבוע לא התקבלו שורשים זרים.

<u>בדיקת הפתרון הראשון</u>: $x_1 = 45° + 90°n$

$$\sin 2[(45° = 90°n)] = \begin{cases} 1 & n = 2 \\ -1 & n = 2p+1 \end{cases} \quad p \in Z \qquad \cos[2(45° + 90°n)] = 0$$

עבור $n = 2p$: $3\sin(90° + 360°p) + \sqrt{3}\cos(90° + 360°p) = 3$, מתקבל: $3 = 3$

עבור $n = 2p+1$: $3\sin(270° + 360°p) + \sqrt{3}\cos(270° + 360°p) = 3$, מתקבל: $-3 = 3$

לכן $x = 45° + 90°n$ הוא פתרון רק עבור n זוגי. כלומר הפתרון הוא: $x = 45° + 180°n$, $n \in Z$.

<u>בדיקת הפתרון השני</u>: $x_2 = 15° + 90°n$

ידוע כי:

$$\sin(30° + 180°n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 2p \\ -\frac{1}{2} & n = 2p+1 \end{cases} \quad p \in Z \qquad \cos(30° + 180°n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & n = 2p \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & n = 2p+1 \end{cases} \quad p \in Z$$

עבור $n = 2p$: $3\sin(30° + 360°p) + \sqrt{3}\cos(210° + 360°p) = 3$

$$3 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

מתקבל: $3 = 3$

עבור $n = 2p+1$: $3\sin(210° + 360°p) + \sqrt{3}\cos(210° + 360°p) = 3$

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3$$

מתקבל: $-3 = 3$

לכן $x = 15° + 90°n$ הוא פתרון רק עבור n זוגי, כלומר הפתרון הוא: $x = 15° + 180°n$, $n \in Z$.

<u>דרך ו' (בעזרת זהות טריגונומטרית):</u>

נשתמש בזהות $\cos 2x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2x}$

$$\mathbf{3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3}$$

$$3\sin 2x \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 2x} = 3$$

נסמן $\sin 2x = t$ ונקבל:

$$\begin{cases} 3t \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - t^2} = 3 \\ |t| \le 1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה במערכת מתקבל:

$$\pm\sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - t^2} = 3(1 - t)$$

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה ונקבל:

$$1 - t^2 = 3(1 - t)^2$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

הפתרונות:

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = 1 \qquad \sin 2x = \frac{1}{2}$$

האפשרויות המתאימות הן:

$$2x = 90° + 360°n \qquad 2x = 30° + 360°n \qquad 2x = 150° + 360^0 n$$

$$x_1 = 45° + 180°n \qquad x_2 = 15° + 180°n \qquad x_3 = 75° + 180°n$$

$$n \in Z \qquad n \in Z \qquad n \in Z$$

יש לבדוק אם כתוצאה מההעלאה בריבוע לא התקבלו שורשים זרים.

בבדיקת הפתרונות מסתבר כי $x = 75° + 180°n$ הוא שורש זר שאינו פתרון של המשוואה המקורית.

<u>דרך ז' (בעזרת הצבה)</u>:

נציב $\sin 2x = A$, $\cos 2x = B$ ונצרף את הזהות: $1 = \sin^2 2x + \cos^2 2x = A^2 + B^2$

מן המשוואה המקורית: $\mathbf{3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3}$

נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 3A + \sqrt{3}B = 3 \\ A^2 + B^2 = 1 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נובע:

$$B = \frac{3(1-A)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}(1-A)$$

וע"י הצבה במשוואה השניה מקבלים:

$$A^2 + \left[\sqrt{3}(1-A)\right]^2 = 1$$

$$A^2 + 3 - 6A + 3A^2 = 1$$

$$4A^2 - 6A + 2 = 0$$

$$2A^2 - 3A + 1 = 0$$

הפתרונות הם:

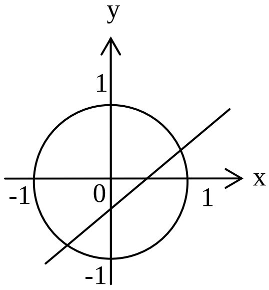
$$A_1 = 1 \Rightarrow B_1 = 0 \quad , \quad A_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow B_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

מכאן נובע:

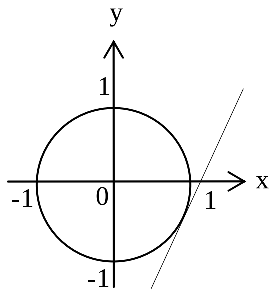
$$\text{I} \quad \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 45° + 180°n \\ x = 45° + 90°n \end{cases} \Rightarrow x = 45° + 180°n \quad n \in Z$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15° + 180°n \\ x = 75° + 180°n \\ x = \pm 15° + 180°n \end{cases} \Rightarrow x = 15° + 180°n \quad n \in Z$$

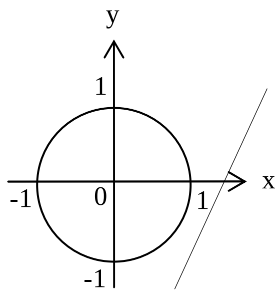
<u>הערה</u> : ההצגה הגרפית של פתרון בדרך זו היא נקודות החיתוך של מעגל היחידה ($x^2 + y^2 = 1$) וקו ישר ($ax + by = c$). קיימים שלושה מקרים אפשריים :



<u>מקרה א'</u>
שני פתרונות



<u>מקרה ב'</u>
פתרון יחיד



<u>מקרה ג'</u>
אין פתרון

למשוואה הנתונה מתאים מקרה א'.

<u>דרך ח' (בעזרת וקטורים)</u> :

כמו בדרך ב' נחלק את שני אגפי המשוואה המקורית ב- $2\sqrt{3}$ ונשנה את סדר המחוברים

$$\mathbf{3\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 3}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ניקח שני וקטורים : $\underline{b}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad$ $\underline{a}(\cos 2x, \sin 2x)$

את המשוואה הנתונה אפשר לרשום בעזרת מכפלה סקלרית : $\underline{a}\cdot\underline{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

אך $\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$ (כאשר α היא הזווית בין הוקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$) ומקבלים :

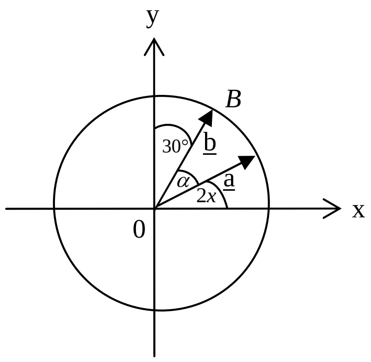
$$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

כאשר : $|\underline{b}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$, $|\underline{a}| = \sqrt{\cos^2 2x + \sin^2 2x} = 1$

ומקבלים :

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

לכן הזווית בין הוקטורים $\underline{a}$ ו- $\underline{b}$ היא בת $30°$.



$$\underline{a}=\overrightarrow{OA}$$

$$\underline{b}=\overrightarrow{OB}$$

<u>נשים לב</u>: וקטור $\underline{b}$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית בת $60°$ $\left(\cos\angle BOX=\frac{1}{2}\right)$

וקטור $\underline{a}$ יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית שמידתה $2x$ מעלות.

מידת הזווית α היא $(2x-60°)$ או $(60°-2x)$ וכידוע $\cos(60°-2x)=\cos(2x-60°)$.

לכן $$\cos(2x-60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

הפתרונות: $$2x-60^{o}=\pm30°+360°n$$

כלומר:

$$2x-60°=-30°+360°n$$
$$2x=30°+360°n$$
$$x_2=15°+180°n$$
$$n\in Z$$

$$2x-60°=30°+360°n$$
$$2x=90°+360°n$$
$$x_1=45°+180°n$$
$$n\in Z$$