הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חס״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הנושא : ״משנים״ את הקבועים ו״מקבעים״ את המשתנים

הוכן ע״י : אלכס קופרמן.

תקציר : בחומר מובאות דוגמאות לשאלות בהם מתייחסים לקבועים כאל משתנים ולהיפך.
השאלות קשורות לפתרון וחקירה של משוואות ואי-שוויונים.

מילות מפתח : אלגברה, פתרון אי שוויונים, אי-שוויון שוורץ, פונקציה, חשבון דיפרנציאלי, חקירת פונקציה, נקודות קיצון, אינטגרלים, אי שוויון שוורץ האינטגרלי, ממוצע חשבוני, ממוצע הנדסי.

החומר הוגש במסגרת : ״קשר–חס״, בחיפה, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ג, דצמבר 1992.
״קשר–חס״, בת״א, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ג, ינואר 1993.
״קשר–חס״, בב״ש, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ג, דצמבר 1992.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 6 עמודים.

"משנים" את הקבועים ו"מקבעים" את המשתנים

בתוכנית הלימודים משולבים הפרקים אלגברה וחשבון דיפרנציאלי בפרק מרכזי אחד – האנליזה.
הדבר מאפשר טיפול בבעיות אלגבריות כגון: פתרון משוואות ואי-שיוויונים באמצעים אנליטיים.
הודות לכך, ניתן להביא לשיעורי מתמטיקה בעיות חדשות ומעניינות שפתרונן דורש הפעלת אסטרטגיות מסוג חדש.
לעיתים בפתרון בעיות נוהגים המתמטיקאים המקצועיים בשיטה הבאה: הופכים את הקבועים למשתנים ולהיפך, מתייחסים למשתנים כקבועים.
נדגים שיטה זו במספר בעיות הקשורות לפתרון וחקירה של משוואות ואי-שיוויונים.
כל אחת מהבעיות המודגמות להלן, ניתנת לשילוב בפרק מתאים בתכנית הלימודים.

1. הוכיחו שאם $a+b+c=0$ אז $a^3+b^3+c^3=3abc$.

רמז: אם נתייחס ל- a כמשתנה, ול- b, c כקבועים, אזי מספיק להוכיח כי המשוואה:

$a^3-(3bc)a+b^3+c^3=0$ מתקיימת עבור $a=-b-c$.

2. יש להוכיח את אי-שוויון שוורץ:

$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$.

<u>*פתרון*</u>:

את אי השיוויון ניתן לרשום $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

אי-השיוויון: $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+mb_i\right)^2 \ge 0$ מתקיים לכל m.

נרשום אי-שוויון זה בצורה שונה: $m^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2+2m\sum_{i=1}^{n} a_ib_i+\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ge 0$

נתייחס ל- a_i, b_i כאל קבועים ול- m כאל משתנה.

מכאן נסיק כי הדיסקרימיננטה Δ מקיימת את התנאי $\Delta \le 0$.

לכן: $4\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$.

מכאן נובע אי-שוויון שוורץ.

מתי אי-שוויון זה הופך לשיוויון?

2.1 תרגילים:

א. הוכיחו באמצעות אי-שיוויון שוורץ שאם $f(x)=a\sin(x)+b\cos(x)$ אזי

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$$

רמז: יש לרשום את $f^2(x)$.

ב. הוכיחו את אי-שיוויון שוורץ האינטגרלי:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

3. נתונה המשוואה $2^x+5^x=3^x+4^x$.

א. נסו לנחש את שני הפתרונות של המשוואה.

ב. הוכיחו כי פתרונות אלו הם היחידים, כלומר למשוואה הנ"ל אין יותר פתרונות ממשיים.

הנחיות:

1. מה מיוחד (או דומה) בשני האגפים של המשוואה?
2. שימו לב כי ניתן לרשום את המשוואה הנ"ל בצורה: $2^x+(7-2)^x=3^x+(7-3)^x$.
3. הגדירו פונקציות עזר $f(t)$ כך ש: $f(2)=2^x+5^x$; $f(3)=3^x+4^x$
4. הוכיחו כי $f'(t)$ בעלת סימן קבוע בקטע $2\le t\le 3$ עבור $x\ne 0, x\ne 1$.
5. האם תוכלו להסיק מכאן כי למשוואה $2^x+5^x=3^x+4^x$ יש בדיוק שני פתרונות: $x=1, x=0$.

3.1 תרגילים:

א. נתונה המשוואה: $3^x+7^x=4^x+6^x$.

נחשו את הפתרונות והוכיחו כי אלה הפתרונות היחידים.

ב. הוכיחו כי לכל $p>1$ (p ממשי) מתקיים: $\left(\frac{1}{3}\right)^p+\left(\frac{2}{3}\right)^p\ge\frac{1}{2^{p-1}}$

רמז: הגדירו פונקצית עזר $f(t)=t^p+(1-t)^p$, $0\le t\le 1$ וחקרו אותה (מצאו את נקודת המינימום).

4. מה גדול יותר: $\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}$ או $\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{7}$

רמז: 1. מה המיוחד בשני הביטויים הנ"ל? הגדירו פונקצית עזר וחיקרו אותה.

2. שימו לב, כי ניתן לרשום את הביטויים כך:

$$\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{7}=\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{10-3}\quad;\quad\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}=\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{10-2}$$

5. (חומר העשרה, למתקדמים).

יש להוכיח כי: $a^{\alpha}b^{\beta} \le \alpha a+\beta b$, (1)

כאשר $a,b,\alpha,\beta>0 \quad \alpha+\beta=1,$.

<u>הנחיות</u>:

1. חלקו את אי-השיוויון הנ"ל ב- b והציבו בו $\beta=1-\alpha$.

הוכיחו כי אי-שיוויון (1) שקול לאי-שיוויון: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}-\frac{a}{b}\alpha \le 1-\alpha$.

2. סמנו כעת $x=\frac{a}{b}$, והגדירו פונקצית עזר $f(x)$, כך ש- $f\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}-\frac{a}{b}\alpha$.

3. מהו הערך הגדול ביותר של $f(x)$?

התוכלו מכאן להוכיח את אי-השיוויון?

4. בהסתמך על אי-שיוויון (1) הוכיחו כי: $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \le \alpha a+\beta b+\gamma c$ (2)

כאשר $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0 \quad \alpha+\beta+\gamma=1,$.

רמז: רשמו $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}=a^{\alpha}\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}$

<u>5.1 תרגילים</u>:

א. ע"י שימוש באי-שיוויון (2) הוכיחו כי: $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$ לכל $a,b,c>0$.

ב. הוכיחו באמצעות האינדוקציה המתמטית כי לכל n טבעי:

$$a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots\alpha_n a_n \qquad (3)$$

כאשר: $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n>0 \quad a_1,a_2,\dots,a_n>0,$.

רמז: העזרו בהנחיה 4 שניתנה בסעיף 5.

ג. הוכיחו באמצעות אי-שיוויון (3) את אי-השיוויון הקושר ממוצע אריתמטי וממוצע גאומטרי:

$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}$, כאשר: $a_1,a_2,\dots,a_n>0$.

__*פתרונות ורמזים לבעיות ולתרגילים:*__

1. נגדיר: $f(a)=a^3-(3bc)a+b^3+c^3$

נוכיח כי $f(-b-c)=0$:

$$(-b-c)^3-(3bc)(-b-c)+b^3+c^3=-b^3-3b^2c-3bc^2-c^3+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3=0$$

מכאן נובע כי $a^3+b^3+c^3=3abc$, כאשר: $a+b+c=0$.

2. אי-השיוויון $\sum_{i=1}^{n}(a_i+mb_i)^2\geq 0$ הופך לשיוויון אם ורק אם כל אחד מהביטויים $(a_i+mb_i)^2$ שווה לאפס. מכאן נסיק כי השיוויון מתקיים אך ורק אם $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$.

2.1 __*פתרון התרגילים:*__

א. בעזרת אי-שיוויון שוורץ נקבל: $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})$

$[a\sin(x)+b\cos(x)]^2\leq(a^2+b^2)[\sin^2(x)+\cos^2(x)]=a^2+b^2$,

ולכן $-\sqrt{a^2+b^2}\leq a\sin(x)+b\cos(x)\leq\sqrt{a^2+b^2}$.

ב. $\int_a^b[f(x)+mg(x)]^2dx\geq 0$ לכל m .

אי-שיוויון זה שקול לאי-השיוויון:

$$m^2\int_a^b g^2(x)dx+2m\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$$

אי- השיוויון האחרון מתקיים לכל m אם ורק אם $\Delta\leq 0$ **.**

מכאן: $4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-4\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\leq 0$,

וכך קיבלנו את אי-שיוויון שוורץ האינטגרלי.

3. א. ע"י ניחוש: $x=1,\ x=0$ הם פתרונות המשוואה.

ב. נגדיר פונקצית עזר: $f(t)=t^x+(7-t)^x$. נתייחס ל- x כאל קבוע ול- t כאל משתנה.

$f(3)=3^x+4^x$, $f(2)=2^x+5^x$. נוכיח, כי לא קיים $x\neq 0,1$ עבורו $f(3)\neq f(2)$,

ונוכיח כי $f'(t)$ מונוטונית בקטע $2\leq t\leq 3$ עבור $x\neq 0,\ x\neq 1$.

$$f'(t)=xt^{x-1}-x(7-t)^{x-1}=x\left[t^{x-1}-(7-t)^{x-1}\right]$$

עבור $x>1$ $f'(t)<0$, כלומר $f(t)$ היא פונקציה יורדת בתחום זה.

עבור $0<x<1$ $f'(t)>0$, כלומר $f(t)$ היא פונקציה עולה בתחום זה.

עבור $x < 0$ $f'(t)<0$, כלומר $f(t)$ היא פונקציה יורדת בתחום זה.

מכאן נסיק כי עבור $x \neq 0,1$ מתקיים $f(2) \neq f(3)$, כלומר אין ערך נוסף של x עבורו יתקיים שיוויון.

ולכן $x = 1, x = 0$ הם הפתרונות היחידים למשוואה: $2^x + 5^x = 3^x + 4^x$

3.1 <u>*פתרון התרגילים*</u>:

א. צריך להגדיר ולחקור את הפונקציה: $f(t) = t^x + (10-t)^x$, $0 \le t \le 10$, ולהוכיח כי $f(t)$ מונוטונית עבור $x \neq 0,1$ בכל אחד משלושת הקטעים $x > 1$, $0 < x < 1$, $x < 0$.

ב. נגדיר: $f(t) = t^p + (1-t)^p$, $0 \le t \le 1$.

$$f'(t) = pt^{p-1} - p(1-t)^{p-1} = p\left[t^{p-1} - (1-t)^{p-1}\right]$$

$f'(t) = 0$ עבור $t = 0.5$.

$f(0) = 1$, $f(1) = 1$.

$$f(0.5) = 0.5^p + 0.5^p = 2 \cdot 0.5^p = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

לפי הנתון $p > 1$ לכן $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$.

מכאן ניתן להסיק כי ל- $f(t)$ יש מינימום מוחלט בנקודה $t = 0.5$, ולכן

$$\left(\frac{1}{3}\right)^p + \left(\frac{2}{3}\right)^p \ge \frac{1}{2^{p-1}}$$

4. נגדיר פונקצית עזר: $f(t) = \sqrt[n]{t} + \sqrt[n]{10-t}$, כאשר $0 \le t \le 10$ בה נתייחס ל- n כאל קבוע ול- t כאל משתנה.

$f(2) = \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{8}$, $f(3) = \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{7}$.

$$f'(t) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{t}\right)^{n-1}} - \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{10-t}\right)^{n-1}}.$$

מכאן נובע כי $f'(t) = 0$ עבור $t = 5$.

לא קשה להוכיח כי בנקודה $t = 5$ יש לפונקציה מקסימום מוחלט.

כמו כן, בקטע $0 < t < 5$ הפונקציה עולה.

מכאן נובע כי $f(2) < f(3)$, ולכן $\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{8} < \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{7}$

5. נגדיר $f(x)=x^{\alpha}-\alpha x$.

ונתייחס ל- x כאל משתנה ול- α כאל קבוע.

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha$,

$f'(x)=0$ עבור $x=1$.

בנקודה $x=1$ לפונקציה $f(x)$ יש מקסימום מוחלט, ולכן $f\left(\frac{a}{b}\right)\le f(1)$, זאת אומרת:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}-\frac{a}{b}\alpha\le 1-\alpha$ ואי- שיוויון זה, כזכור, שקול לאי-השיוויון: $a^{\alpha}b^{\beta}\le\alpha a+\beta b$.

כדי להוכיח כי: $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\le\alpha a+\beta b+\gamma c$, כאשר $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$,

נרשום: $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}=a^{\alpha}\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}$, ונישם את הפתרון הנ"ל בתחילה לגבי הביטוי שבתוך

הסוגריים: $\le\ a^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)^{\beta+\gamma}\ \le$

ואח"כ לגבי מכפלת שני הגורמים שנותרו:

$$\le\alpha a+(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)=\alpha a+\beta b+\gamma c$$

5.1 *<u>פתרון התרגילים</u>*:

א. נציב באי-השיוויון: $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\le\alpha a+\beta b+\gamma c$, $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$,

ואז נקבל $a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot c^{\frac{1}{3}}\le\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$

ומכאן $\sqrt[3]{abc}\le\frac{1}{3}(a+b+c)$

ב. נציב באי-השיוויון: $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}\le\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n$ את:

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_n=\frac{1}{n}$

ונקבל: $a_1^{\frac{1}{n}}\cdot a_2^{\frac{1}{n}}\cdot a_3^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot a_n^{\frac{1}{n}}\le\frac{1}{n}\cdot a_1+\frac{1}{n}\cdot a_2+\frac{1}{n}\cdot a_3+\ldots+\frac{1}{n}\cdot a_n$

ולכן, $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$, כאשר: $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$.