הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״ : **ל**קידום **ש**יפור **ו**ריענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הנושא: **גישה פונקציונלית להתרת אי-שוויונים**

הוכן ע״י : אלכס קופרמן.

תקציר : בחומר מוצג אוסף של אי-שוויונים מסוגים שונים הניתנים לפתרון בשיטה של חקירת פונקציות בעזרת חשבון דיפרנציאלי.

מילות מפתח : אלגברה, אי שוויונים, אי שוויון מעריכי, אי שוויון לוגריתמי, אי שוויון טריגונומטרי, חשבון דיפרנציאלי, חדו״א, אנליזה, פונקציה מעריכית, פונקציה לוגריתמית, טריגונומטריה, זהות טריגונומטרית, פונקציה טריגונומטרית, פונקציה מונוטונית, נגזרת, נקודות קיצון, מינימום מקומי, מינימום מוחלט, מקסימום מקומי, מקסימום מוחלט, נקודת קצה, תחום סגור, תחום פתוח.

החומר הוגש במסגרת : ״קשר-חם״ - בתל-אביב, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״א, אפריל 1991.
״קשר-חם״ - בבאר-שבע, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״א, מאי 1991.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 5 עמודים.

גישה פונקציונלית להתרת אי-שוויונים

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו״א) מספק כלים חזקים לחקירת פונקציות. נראה איך ניתן בעזרת כלים של חדו״א להוכיח אי-שוויונים מסוגים שונים.

דוגמא

<u>תרגיל 1</u>: יש להוכיח כי לכל $x \geq 0$ מתקיים: $E^x \geq 1+x$

<u>פתרון</u>: נסמן $f(x) = E^x - x - 1$

אי השיוויון $E^x \geq 1+x$ מתקיים אם ורק אם $f(x) \geq 0$.

נמצא את הערך הקטן ביותר של $f(x)$ בקטע $x \geq 0$.

לשם כך יש למצוא את הערכים של f בנקודות קריטיות ובנקודות הקצה $x = 0$.

ובכן, עבור $x = 0$, $f(0) = 0$.

כמו כן: $f'(x) = E^x - 1$. לפיכך: $f'(0) = 0$ ולכל $x > 0$ מתקיים $f'(x) > 0$.

מכאן נובע כי $f(x) \geq f(0)$ לכל $x \geq 0$.

כלומר $E^x - x - 1 \geq 0$.

מ.ש.ל.

<u>תרגיל 2</u>: יש להוכיח כי לכל $x \geq 0$ מתקיים $ln(1+x) \geq \dfrac{x}{1+x}$

רמז: סמנו $f(x) = ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

והוכיחו כי $f(x) \geq 0$ לכל $x \geq 0$.

<u>נסכם</u>: כדי להוכיח כי $f(x) \geq 0$ בקטע D יש למצוא את הערך הקטן ביותר של f בקטע D ולהוכיח כי ערך זה אינו שלילי. מכאן ניתן להסיק כי $f(x) \geq 0$ לכל x השייך ל- D.

דוגמא

<u>תרגיל 3</u>: יש להוכיח כי לכל n טבעי $2^n \geq n+1$.

<u>פתרון</u>: נוכיח אי-שוויון כללי **יותר** $2^x \geq x+1$. לכל x ממשי המקיים: $x \geq 1$.

לשם כך נגדיר $f(x) = 2^x - (x+1)$.

$f(0) = 0 \quad , \quad f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 1$.

אך $2 \cdot ln2 \sim 1.38$ ולכן $f'(x) > 0$ לכל $x \geq 1$.

מסקנה: $f(x)$ עולה לכל $x \geq 1$

מכאן: $f(x) \geq f(0)$ לכל $x \geq 1$ ולכן $2^x - (x+1) \geq 0$ לכל $x \geq 1$.

מ.ש.ל

<u>תרגיל 4</u>: יש להוכיח כי לכל $a>0$, $b>0$ מתקיים: $3a^3+7b^3 \geq 9ab^2$

רמז: חלקו את שני האגפים של אי-השוויון הנ"ל ב- b^3 וסמנו: $x=\frac{a}{b}$

<u>תרגיל 5</u>: יש להוכיח כי לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$ מתקיים: $sinx<x$

רמז: סמנו $f(x)=x-sinx$ והוכיחו כי:

א) $f(0)=0$

ב) $f'(x)>0$ לכל $0<x<\frac{\pi}{2}$

<u>תרגילים נוספים שתוכלו לפתור בשיטה זו</u>:

6. יש להוכיח כי $4ab(3-a)-4(1+b)^2a \leq b$, לכל $a>0$, $b>a$.

רמז: סמנו $f(a)=4ab(3-a)-4(1+b)^2a-b$ והוכיחו כי $f(a)\leq 0$ לכל $a>0$

7. יש להוכיח כי $8(a^4+b^4)\geq(a+b)^4$ לכל $b\neq 0$.

רמז: חלקו את שני האגפים ב- b^4 וסמנו $x=\frac{a}{b}$

8. יש להוכיח כי $ln(1+x)\leq x$ לכל $x\geq 0$

9. יש להוכיח כי $\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1$ לכל $0\leq x\leq 1$ (p מספר ממשי כלשהו).

<u>פתרונות</u>:

<u>תרגיל 2</u>

יש להוכיח כי $f(x)=ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\geq 0$ עבור $x\geq 0$

א. נבדוק עבור נקודת הקצה $x=0$: $f(0)=ln1-0=0$

ב. נחפש נקודות קיצון: $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

כלומר: $f'(0)=0$

היות ו- $f'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$ אז לכל $x>0$ $f'(x)>0$

לכן $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה בקטע $x\geq 0$

ולכן $f(x)\geq 0$ עבור כל $x\geq 0$ $\Leftarrow$ $ln(1+x)\geq \frac{x}{1+x}$

מ.ש.ל

<u>תרגיל 4</u>

נחלק את שני האגפים ב b^3 ונקבל: $3\left(\frac{a}{b}\right)^3+7\geq 9\left(\frac{a}{b}\right)$

נגדיר $x=\frac{a}{b}$.

נקבל את אי השויון: $3x^3+7\geq 9x$

נסמן: $f(x)=3x^3-9x+7$

ונוכיח כי $f(x)\geq 0$ לכל $x>0$ (היות ו- $a>0$, $b>0$ אז $x>0$).

$$f'(x)=9x^2-9$$

$$f'(x)=0 \ \Rightarrow x=\pm 1$$

$x=-1$ אינו נמצא בתחום ההגדרה $x>0$.

$f''(x)=18x$ ועבור $x=1$: $f''(1)>0$

ולכן לפונקציה $f(x)$ יש בנקודה $x=1$ מינימום מקומי, ו- $f(1)=1$

בנקודת הקצה $x=0$: $f(0)=7$ ולכן $x=1$ הוא מינימום מוחלט בתחום. היות ו- $f(1)=1$,

נקבל $3x^3-9x+7\geq 1$ עבור כל $x>0$, ובוודאי מתקיים $3x^3-9x+7\geq 0$

מ.ש.ל

<u>תרגיל 5</u>

נסמן $f(x)=x-sinx$

א. נבדוק מה קורה בנקודות הקצה. עבור $x=0$: $f(0)=0$

עבור $x=\frac{\pi}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$

ב. $f'(x)=1-cosx$. בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ נקבל: $f'(x)>0$.

כלומר $f(x)$ פונקציה מונוטונית עולה, כאשר המינימום שלה בתחום הוא בנקודת הקצה $x=0$.

כלומר $f(x)>0$ ולכן $x-\sin x>0$ $\Leftarrow$ $x>\sin x$

מ.ש.ל

<u>תרגיל 6</u>

נסמן $f(a)=12ab-4a^2b-4(1+b)^2a-b$

צ"ל כי $f(a)\le 0$ לכל $a>0$

$$f'(a)=12b-8ab-4(1+b)^2$$

$$f'(a)=0 \Leftarrow \quad 12b-4(1+b)^2=8ab$$

$$-4b^2+4b-4=8ab$$

$$a_0=\frac{-4b^2+4b-4}{8b}=-\frac{b^2-b+1}{2b}$$

$$f''(a)=-8b$$

כאשר $b>0$ נקבל $f''(a)<0$. כלומר הנקודה $a=a_0$ היא נקודת מקסימום.

$a_0<0 \Leftarrow f(a_0)<0$ עבור $a>0$, $b>0$

ולכן $f(a)<0$ לכל $a>0$.

מ.ש.ל

<u>תרגיל 7</u>

נחלק את שני אגפי אי השוויון ב- b^4 $(b\neq 0)$ ונקבל:

$$8\left(\frac{a}{b}\right)^4+8\geq\left(\frac{a+b}{b}\right)^4$$

נסמן $x=\frac{a}{b}$ ו- $f(x)=8x^4+8-(x+1)^4$. צ"ל כי: $f(x)\geq 0$ לכל x.

$$f'(x)=32x^3-4(x+1)^3$$

$$f'(x)=0 \Leftarrow 8x^3=(x+1)^3 \Leftarrow 2x=x+1 \Leftarrow x=1$$

$$f''(x)=96x^2-12(x+1)^2$$

ועבור $x=1$ נקבל: $f''(1)>0$. כלומר $x=1$ היא נקודת מינימום.

$f(1)=0$ ולכן $f(x)\geq 0$ עבור כל x.

מ.ש.ל

<u>תרגיל 8</u>

נסמן $f(x)=ln(1+x)-x$

צ״ל: $f(x)\le 0$ עבור כל $x\ge 0$

א. עבור נקודת הקצה $x=0$ נקבל: $f(0)=0$

ב. $f'(x)=\frac{1}{x+1}-1$. $f'(x)=0 \Leftarrow x=0$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0)<0$$

לכן הנקודה $x=0$ היא נקודת מקסימום.

מצאנו ש- $f(0)=0$. ולכן $f(x)\le 0$ עבור כל $x\ge 0$.

מ.ש.ל

<u>תרגיל 9</u>

נסמן $f(x)=x^p+(1-x)^p$

נמצא את המקסימום והמינימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)$

א. בנקודות הקצה:

$$f(1)=1\ ,\ f(0)=1$$

ב. $f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$

$$f'(x)=0 \Leftarrow x^{p-1}=(1-x)^{p-1}$$

$$x_1=1-x_1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$$

$x_2=-1+x_2 \Rightarrow$ אין פתרון

$$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}+p(p-1)x^{p-2}>0$$

כלומר $x=\frac{1}{2}$ היא נקודת מינימום.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{1}{2^{p-1}}$$

ולכן $\frac{1}{2^{p-1}}\le f(x)\le 1$

מ.ש.ל