הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

הנושא: **תפקידם של פרדוקסים בהתפתחות המתמטיקה**

הוכן ע״י: פרופ׳ נצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: בחומר מובאות דוגמאות של פרדוקסים שבהשראתם התבהרו ועוצבו מושגים מתמטיים בסיסיים ובעקבותיהם הושגו תוצאות מרכזיות במהלך ההיסטוריה של המתמטיקה. הדוגמאות עוסקות במספרים, בלוגריתמים, בפונקציות, ברציפות, במשיקים, בסדרות אינסופיות, בקבוצות, בעקומים ובפירוקן של צורות גיאומטריות.

מילות מפתח: פרדוקס, פרדוקסים, מספרים שליליים, מספרים רציונליים, מספרים אי-רציונליים, מספרים מרוכבים, מספרים ממשיים, אלגברה, פתרון משוואה ממעלה שלישית, רדיקלים, לוגריתמים, סדרה, סדרות, טור מתכנס, התכנסות במידה שווה, גיאומטרית המישור, משולש, משפט פיתגורס, דמיון משולשים, ריבוע, אלכסון, מעגל, מידה משותפת, תורת הפרופורציה, שטח, פונקציות, חשבון דיפרנציאלי, עקום, גבול, משיק, פונקציה רציפה, פונקציה אי-רציפה, פונקציה גזירה, פונקציה לא גזירה, חשבון אינטגרלי, אינטגרל, טריגונומטריה, סינוס, קוסינוס, תורת הקבוצות, היסטוריה של המתמטיקה, פיתגוראים, מתמטיקה יוונית, יודוקסוס, וואליס, קארדן, בומבלי, ברנולי, לייבניץ, אוילר, ניוטון, פורייה, דיריכלה, באייר, קושי, ויירשטרס, אבל, פרמה, ברקלי, ראסל, פרגה, פיאנו, מנגר, יוריסון, באנך, טרסקי, לסקוביץ׳.

החומר הוגש במסגרת: בי״ס קיץ בנושא ״שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה״, שנה״ל תשס״ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 18 עמודים.

תפקידם של פרדוקסים בהתפתחות המתמטיקה[1]

פתח דבר

אפשר לומר שפרדוקס הוא אמת העומדת על ראשה כדי למשוך תשומת-לב. אין ספק שפרדוקסים שובים את השכל. בעת ובעונה אחת הם מפתים, מרגיזים, משעשעים ולעיתים מכעיסים. יתרה מזאת, הם מעוררים סקרנות, מניעים וממריצים את החשיבה.

במאמר זה נציג דוגמאות של פרדוקסים שהשפיעו על התפתחות המתמטיקה. בהשראתם התבהרו מושגים מתמטיים בסיסיים ובעקבותיהם הושגו תוצאות מרכזיות במהלך ההיסטוריה של המתמטיקה. הדוגמאות יעסקו במספרים, בלוגריתמים, בפונקציות, ברציפות, במשיקים, בסדרות אינסופיות, בקבוצות, בעקומים ובפירוקן של צורות גיאומטריות.

נשתמש במונח "פרדוקס" במובן הרחב של המילה הכולל: חוסר-עקביות, דוגמה נגדית לרעיון מקובל למדי, תפיסה מוטעית, טענה אמיתית אשר נראית כשקרית, או טענה שקרית שנראית כאמיתית. במובנים שונים אלו מילאו הפרדוקסים תפקיד חשוב בהתפתחות המתמטיקה. אכן, כפי שבֶּל (Bell) ודייויס (Davis) ניסחו זאת, בהתאמה:

> במתמטיקה, הטעויות והקשיים הבלתי-פתורים של העבר היוו תמיד את ההזדמנויות לעתידה ([1], עמ' 283).
>
> אחד ההיבטים המפתים ביותר של המתמטיקה הוא שלפרדוקסים הקוצניים ביותר שלה יש נטייה לפרוח לתיאוריות יפהפיות ([6], עמ' 55).

פרדוקסים יכולים למלא תפקיד שימושי גם בכיתה. את המבוכה וחוסר הביטחון הזמניים שהם עשויים לגרום לתלמידים, אפשר לנצל לטובה. מצבים של קונפליקט ושל חוסר-נוחות הם כלים פדגוגיים רבי-תועלת (בתנאי, כמובן, שהם מטופלים). הם יכולים לסייע לתלמידים בטיפוח של גישה בלתי-תבוסתנית למצב של "אני תקוע(ה)", הם יכולים לספק להם הזדמנות לויכוח ולבירור של מחלוקת בנושאים מתמטיים, ולקדם את ההכרה שלהם בכך שפעמים רבות זוהי הדרך שבה מתפתחת המתמטיקה. למורים, ההבנה של ההתמודדות בה עמדו חלק מגדולי המתמטיקאים של כל הזמנים, תוך כדי פיתוח המושגים וקבלת התוצאות המתמטיות אותם השיגו, יכולה לתרום להבנת הקשיים של תלמידים בהתמודדותם עם מושגים ותוצאות אלה. חרף היותם פרדוקסליים ואתגריים בזמנם, הפכו המושגים והתוצאות למקובלים בדורות הבאים. במילותיהם של קסנר וניומן:

> זרם השינויים העוברים על מורשת המדע הוא רצוף עד כדי כך שדבר הכפירה של אתמול הוא התורה של היום והיסוד המוסד של מחר ([12], עמ' 193).

---

[1] מאמר זה הוא תרגום לעברית של המאמר
I. Kleiner and N. Movshovitz-Hadar: The Role of Paradoxes in the History of Mathematics, *American Mathematical Monthly*. 1994, Vol. 101, No. 10, pp. 963-974.
המאמר זיכה את מחבריו בפרס ע"ש לסטר-פורד לשנת 1995 על המאמר המצטיין המוענק אחת לשנה על ידי
MAA - The Mathematical Association of America
תודת המחברים נתונה לסוזי שפירא על עזרתה בהכנת המהדורה העברית אשר פורסמה בעל"ה - כתב העת למורים למתמטיקה, גיליון 18, 1996

פרדוקסים העוסקים במספרים

התפתחות מושג המספר זרועה בפרדוקסים כמעט לאורך כל הדרך. כפי שניסח זאת דייויס:

> פרדוקסלי הוא שבעוד שהמתמטיקה ידועה כתחום היחיד אשר אינו סובל סתירות כלשהן, המציאות היא שיש לה היסטוריה ארוכה ומוצלחת של קיום לצד סתירות. בצורה הטובה ביותר ניתן לראות זאת בהרחבות של מושג המספר אשר בוצעו במשך תקופה של 2500 שנה. מקבוצות מוגבלות של מספרים שלמים, לשברים, מספרים שליליים, מספרים אי-רציונליים, מספרים מרוכבים, ועד למספרים טרנספיניטיים, כל הרחבה, בדרכה שלה, התגברה על קבוצת דרישות סותרות ([7], עמ׳ 305).

המשפט הראשון בציטוט לעיל יכול להיחשב כ״פרדוקס-על״ (meta-paradox) – הצהרה פרדוקסלית, לא טכנית, אודות תופעה פרדוקסלית, טכנית. בהמשך נצביע על מגוון של פרדוקסי-על מסוג זה; הם מעניינים בזכות עצמם כנושאים לדיון או להרהור פילוסופי. אולם עתה ניגש לפרדוקסים אחדים העוסקים בהתפתחותן של מערכות מספרים שונות.

א. הפיתגוראים של המאה ה-6 לפנה״ס האמינו שניתן לקצוב את מידתו של כל קטע על ידי מספר שלם חיובי או על ידי יחס בין שני מספרים שלמים כאלה. הייתה זו עבורם לא רק עובדה המתקבלת מאד על הדעת, אלא אחד מעיקרי אמונתם, חלק מהותי של הפילוסופיה שלהם. יתר על כן, הרעיון היווה בסיס לתורת הפרופורציה הפיתגוראית (ר׳ [23]). הם הוכו, איפוא, בתדהמה גדולה (פרדוקס) כאשר גילו שאת מידת האלכסון של ריבוע היחידה לא ניתן לבטא בעזרת מספר שלם או יחס בין שני מספרים שלמים; או, כפי שניסחו זאת היוונים, שהאלכסון והצלע של ריבוע אינם בעלי מידה משותפת[2]. ההוכחה שלהם של תוצאה זו היא בעיקרו של דבר ההוכחה בה משתמשים כיום כדי להראות ש- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונלי. הפיתגוראים קיבלו את הפרדוקס על ידי שימוש במשפט פיתגורס. אנו מגיעים מכאן ל -

פרדוקס-על: משפט פיתגורס המיט אסון על הפילוסופיה הפיתגוראית ועל תורת הפרופורציה הפיתגוראית.

התגלית שהאלכסון וצלע הריבוע אינם בעלי מידה משותפת הייתה בעלת תוצאות מרחיקות לכת עבור המתמטיקה היוונית. לזכותה ייאמר שבהשראתה הניח יודוקסוס את היסודות לתורת פרופורציה מתוחכמת אשר ניתנת ליישום הן לגדלים בעלי מידה משותפת והן לכאלה שאינם. למעלה מאלפיים שנים מאוחר יותר, הניע פיתוח זה את דדקינד להגדיר את המספרים הממשיים בעזרת ״חתכי דדקינד״. לחובתה של התגלית האמורה נזקף המהפך בכיוון הפיתוח של

[2] אומרים על שני קטעים שהם בעלי מידה משותפת אם קיימת יחידת מידה שמידתו של כל אחד מהקטעים באמצעותה, היא מספר שלם. שני קטעים שהיחס בין מידותיהם הוא מספר רציונאלי הם בעלי מידה משותפת. למשל, אם האורך של האחד הוא מטר והשני הוא בעל אורך של 2.5 מטר, היחידה של חצי מטר ״נכנסת״ לכל אחד מהם מספר שלם של פעמים ולכן הם בעלי מידה משותפת. אם האחד אורכו מטר והשני אורכו $\sqrt{2}$ מטר, אין להם מידה משותפת.

המתמטיקה היוונית (לפחות בתקופתה הקלאסית, והפורייה ביותר) משיתוף הרמוני בין המספר והגיאומטריה להתעסקות כמעט בלעדית בגיאומטריה.

ב. הכנסתם של המספרים השליליים לתוך המתמטיקה והשימוש שנעשה בהם בהמשך עוררו לעתים מזומנות תדהמה וקשיים מרובים. מסגרת תפיסתית מרכזית אותה היה צריך לנטוש הייתה האיסור לחסר מספר גדול ממספר קטן ממנו. וואליס (Wallis) ניסח זאת במאה ה-17 כך:

> איך יכול גודל כלשהו להיות יותר קטן משום-דבר, או כיצד זה יוכל מספר כלשהו להיות פחות מכלום? ([20], עמ' 438).

בין יתר הפרדוקסים העוסקים במספרים שליליים נמצאים השניים הבאים:

(1) וואליס "הוכיח" שמספרים שליליים הינם גדולים מאינסוף. הטיעון שלו היה שמאחר ו- $\frac{a}{0} = \infty$ (עבור a חיובי) הרי ש - $\frac{a}{[\text{מס' שלילי}]} > \infty$ מפני שהקטנת המכנה גורמת להגדלת השבר. . .

(2) במכתב ללייבניץ (Leibniz) התנגד ארנולד (Arnauld, מתמטיקאי ופילוסוף בן המאה ה-17) לשוויון $\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$ מהסיבה שהיחס בין גודל מסוים לגודל קטן יותר אינו יכול להיות שווה ליחס בין הגודל הקטן יותר לגודל הגדול ממנו. לייבניץ הסכים שקיים כאן קושי, אולם טען שיש לנהוג סובלנות כלפי המספרים השליליים משום שהם שימושיים, ובאופן כללי מובילים לתוצאות עקביות (ר' [5] עמ' 39-40).

ההיסטוריה של המתמטיקה יודעת מקרים רבים של הצדקת רעיונות, שאי אפשר להסבירם בשום אופן, אלא על בסיס היותם שימושיים. עובדה זו מובילה לעוד -

פרדוקס-על: כיצד יכולים דברים חסרי-משמעות (או במקרה הטוב בלתי-ניתנים להסבר) להיות כה שימושיים?

מובן שמתוך חוסר-המשמעותיות (או המבוכה) עלו, עם הזמן, בהירות והבנה.

ג. פתרון משוואות ממעלה שלישית בעזרת רדיקלים (נוסחאות) היה אחד ההישגים הגדולים ביותר של המתמטיקה של המאה ה-16. פתרונו של קארדן (Cardan) למשוואה:

$x^3 = ax + b$ ניתן על ידי הנוסחה:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

בּומבֶּלי (Bombelli) יישם אותו למשוואה $x^3 = 15x + 4$ וקיבל:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

קארדן שלל קודם לכן את הישימות של נוסחתו למשוואות כאלו היות והדבר הוביל לשורשים ריבועיים של מספרים שליליים, אותם דחה מכל וכל. אולם בומבלי הבחין (על ידי בדיקה)

ש- $x = 4$ הוא פתרון של משוואה: $x^3 = 15x + 4$ (שני השורשים האחרים, $-2 \pm \sqrt{3}$, גם הם ממשיים).

היה כאן פרדוקס: השורשים של $x^3 = 15x + 4$ הם ממשיים, אולם הנוסחה הנותנת את השורשים כוללת מספרים מרוכבים, שהיו באותה עת חסרי-משמעות. "נראה שהעניין כולו נסב סביב פלפול ולא סביב האמת" ציין בומבלי ([15], עמ' 2), והציב לעצמו את המשימה של יישוב אותו פלפול, דבר שהוביל ללידתם של המספרים המרוכבים[3]. אולם, לידתם לא הביאה בעקבותיה באופן מיידי לגיטימציה של מעמדם כמספרים לכל דבר. לשם כך היה צורך ב-250 שנים נוספות שרק בסופן זכו המספרים המרוכבים באמת ובתמים למעמדם המוכר כיום כישויות מתמטיות.

פרדוקסים העוסקים בלוגריתמים

שאלת משמעותם של לוגריתמים של מספרים שליליים ומרוכבים עלתה בראשית המאה ה-18 בהקשר לאינטגרציה. באנלוגיה למקרה הממשי, ביצע יוהאן ברנולי (Johann Bernoulli) אינטגרציה של $\frac{1}{x^2 + a^2}$ כך:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{(x+ai)(x-ai)} = \frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2ai}\left[\log(x+ai)-\log(x-ai)\right] = -\frac{1}{2ai}\log\frac{x+ai}{x-ai}$$

בתכתובת ביניהם (אשר החלה בשנת 1702 ונמשכה שישה-עשר חודשים) התווכחו ברנולי ולייבניץ על המשמעות של $\log\left(\frac{x+ai}{x-ai}\right)$ ועל המשמעות של $\log(-1)$.[4]

ברנולי טען ש- $\log(-1)$ הוא מספר ממשי בעוד לייבניץ טען שהוא מספר דמיוני, וכל אחד מהם הביא נימוקים שונים לתמוך בדעתו שלו.

לדוגמה, ברנולי טען שמאחר ו- $\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$ הרי ש- $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x}$

ולכן $\log x = \log(-x)$ ובפרט $\log(-1) = \log 1 = 0$. בין נימוקיו של לייבניץ היו הטיעונים הבאים:

[3] בומבלי פיתח חוקים לטיפול בביטויים בעלי הצורה $a + b\sqrt{-1}$ וכתוצאה מכך הצליח להראות שאחד הערכים של $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ הוא אכן 4.

[4] הסימון log משמש ללוגריתמים הטבעיים (לפי בסיס e)

(1) מאחר והטווח של $\log a$ עבור $a > 0$ הוא כל המספרים הממשיים, הרי ש $\log a$ עבור $a < 0$ חייב להיות מדומה, שכן המספרים הממשיים כבר "נתפסו".

(2) אילו היה $\log(-1)$ ממשי, אזי גם $\log i$ היה ממשי, שכן

$$\log i = \log(-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(-1) .$$

אולם זהו בבירור אבסורד, לדעתו של לייבניץ.

(3) הצבה של $x = -2$ בפיתוח לטור של $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

נותנת

$$\log(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \ldots$$

היות והטור מימין אינו מתכנס, הסכום איננו ממשי, ולפיכך הוא חייב להיות מדומה.

אלה הן אכן דוגמאות מעניינות של אומנות המניפולציה הסימבולית (שלא לדבר על "מדע") של חלק מגדולי המתמטיקאים של המאות ה-17 וה-18. הפרדוקסים שהתקבלו "עינו אותי. . .במשך זמן רב", ציין אוילר (Euler) ([17], עמ' 72). הוא יישב אותם במאמרו משנת 1749. אנו מצטטים מתוך ההקדמה המעניינת שלו ([14], עמ' 4):

> היות והלוגריתמים הם בבירור חלק מהמתמטיקה הטהורה, יהיה זה מן הסתם מפתיע לגלות שעד כה הם היוו נושא למחלוקת מביכה. יהיה הצד שבו תומכים אשר יהיה, מופיעות בו סתירות שנראה כאילו בכלל לא ניתן ליישב אותן. לפי שעה, אם על האמת להיות אוניברסלית, הרי שלא יכול להיות כל ספק בכך שסתירות אלו, ולא משנה עד כמה הן נראות כבלתי-פתירות, יכולות להיות אך ורק עניין של מראית-עין. . .אחשוף את כל הסתירות המעורבות במלואן, כך שניתן יהיה לראות עד כמה קשה לגלות את האמת ולהישמר מפני חוסר עקביות, אפילו כאשר שני אנשים דגולים עובדים על הבעיה.

המפתח לפתרונו של אוילר הייתה נוסחת אוילר-קוטס (Euler-Cotes): $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

מנוסחה זו עולה כי:

$$e^{i(\pi+2n\pi)} = \cos(\pi + 2n\pi) + i\sin(\pi + 2n\pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

ומכאן: $\log_e(-1) = i(\pi + 2n\pi)$, עבור: $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

על-כן $\log(-1)$ הוא ביטוי רב-ערכי (למעשה, בעל אינסוף ערכים) וכל ערכיו הם מרוכבים. הן ברנולי והן לייבניץ טעו, איפוא, הראשון "יותר" מהאחרון.

פרדוקסים העוסקים בפונקציות

מקורו של מושג הפונקציה בתחילת המאה ה-18. ניוטון ולייבניץ המציאו את החדו"א (חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי) לקראת סוף המאה ה-17. לפנינו, לכן, עוד

פרדוקס-על: חדו"א ללא פונקציות.

החדו"א של ניוטון ולייבניץ לא היה חדו"א של פונקציות, אלא של עקומים (הנתונים על ידי משוואות). הפונקציה נתפסה בתקופות שונות כנוסחה, עקום, או התאמה שרירותית. פרדוקסים שהתגלעו מדי פעם בפעם הדיחו מגדולתם היבט זה או אחר של הפונקציונליות. אפילו המשמעות של נוסחה כשלעצמה, כמו גם של מרחב הקיום שלה (כלומר, הפונקציות הניתנות לייצוג על ידי נוסחאות), השתנו עם הזמן, והיו לעתים קרובות נושאים השנויים במחלוקת. לדוגמה:

א. עבור אוילר ובני-זמנו במאה ה-18, לפונקציה הייתה משמעות של נוסחה, אשר המושג 'נוסחה' בעצמו, אף כי לא הוגדר בקפידה, נבנה בצורה רחבה כדי לאפשר (בין היתר) לסכומים ומכפלות אינסופיים להיכלל בין תצורותיו. הנחות אחדות היו בלתי-מפורשות:

1. הפונקציה (הנוסחה) הייתה צריכה להינתן על ידי ביטוי יחיד.

לפיכך $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ -x, & x\le 0 \end{cases}$ לא נחשבה כפונקציה.

2. המשתנה הבלתי-תלוי היה צריך להשתרע על פני כל המספרים הממשיים (למעט אולי נקודות מבודדות, כמו למשל ב- $f(x)=\dfrac{1}{x}$).

לפיכך $f(x) = x,\ 0 \le x \le 1$ לא נחשבה פונקציה.

3. ההנחה לגבי שתי פונקציות שמתלכדות על קטע הייתה שהן מתלכדות על פני כל הישר.

החשיבות המיוחדת של ההנחות הללו נעוצה בכך שהאלגוריתמים של החדו"א התייחסו באותה תקופה רק לפונקציות כאלה.

כתוצאה מעבודתו של פוּרְיֶה (Fourier) על הולכת חום, אשר בוצעה בעשורים הראשונים של המאה ה-19, הפכו את פניהן חלק גדול מהתפיסות (המוטעות) של המאה ה-18 ביחס לפונקציות. פורייה טען לכך שהוא הראה שכל פונקציה המוגדרת על פני קטע כלשהו ניתנת להצגה באותו קטע כסדרה אינסופית של סינוסים וקוסינוסים – סדרת פורייה[5].

לדוגמה, אם:
$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi<x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & 0<x<\pi \end{cases}$$

אזי:
$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right)$$

לכל x בקטע $(-\pi\ ,\ \pi)$[6].

[5] לאור התפיסה שלנו של פונקציות, תוצאה זו אינה נכונה, כמובן, במידת הכלליות שפורייה טען לה. למרות זאת, פונקציות רבות למדי כן ניתנות לייצוג על ידי טורי-פורייה. למעשה, אין תימה בכך שבני זמנו של פורייה לא מצאו לכך דוגמא נגדית.

[6] בחלק השני של המאה ה-18, בעקבות ויכוחים שנסבו סביב הבעיה הידועה בשם בעיית המיתר הרוטט, אפשר היה בחוגים מסוימים לדבר על פונקציות המוגדרות באמצעות יותר מביטוי אחד (ר' [16]).

עבודתו של פורייה הביאה בעקבותיה לנטישתן של הנחות בסיסיות אחדות בנוגע לפונקציות:

1. נעשה לגיטימי, וחשוב, להתבונן בפונקציות שתחומן הוא קטע ולא הציר הממשי כולו.
2. שתי פונקציות יכולות להתלכד על פני קטע אך להיות שונות מחוצה לו.
3. פונקציה הניתנת על ידי שני ביטויים נפרדים או יותר, יכולה להיות שווה לפונקציה הניתנת על ידי ביטוי יחיד.

ב. במאמר משנת 1829 על סדרות פורייה הציג דיריכְלֶה (Dirichlet) את מה שמכונה כיום פונקציית דיריכְלֶה:

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{רציונלי } x\\ 0 & \text{אי- רציונלי } x\end{cases}$$

פונקציה זו לא הייתה נוסחה וגם לא עקום. היא היוותה סוג חדש של פונקציה, אשר תוארה על ידי התאמה. היא הייתה הראשונה מבין פונקציות רבות אשר קיבלו את הכינוי "פונקציות פתולוגיות" – אולם לא לזמן רב (ר' [25]).

בסוף המאה ה-19 הרחיב באֵיֶר (Baire) (שוב) את רעיון הנוסחה. נוסחה עבורו הייתה ביטוי המתקבל ממשתנה וקבועים אחדים על ידי מספר חזרות (שיכול להיות אינסופי בר-מנייה) של פעולות חיבור, כפל ומציאת גבולות. הוא קרא לפונקציה כזאת פונקציה הניתנת לייצוג אנליטי והראה שפונקציית דיריכְלֶה היא מסוג זה, שכן:

$$D\left(x\right)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos\left(m!\pi x\right)^{2n}$$

כך הפכה פונקציית דיריכְלֶה ה"פתולוגית" לפונקציה מן השורה, הניתנת לייצוג אנליטי.

האם כל פונקציה ניתנת לייצוג אנליטי? – כן ולא. אם הנכם פורמליסטים, תוכלו להראות על ידי טיעון של מנייה שהעוצמה של קבוצת הפונקציות הניתנות לייצוג אנליטי היא c בעוד שברור שקבוצת כל הפונקציות עוצמתה 2^c. לפיכך יש מספר בלתי ניתן למנייה של פונקציות אשר אינן ניתנות לייצוג אנליטי. אולם איש עדיין לא נתן אפילו דוגמא קונסטרוקטיבית אחת כזאת.

פרדוקסים העוסקים ברציפות

למרות שרציפות היא כיום מושג בסיסי במתמטיקה, הגדרתה המודרנית לא נוסחה עד למאה ה-19, כ-150 שנה לאחר המצאת החדו"א על ידי ניוטון ולייבניץ. במאה ה-18 אוילר הגדיר מושג מסויים של רציפות כתגובה על המחלוקת הנודעת על בעיית המיתר הרוטט ([18], עמ' 301). פונקציה רציפה הייתה פונקציה אשר נתונה על ידי ביטוי יחיד (נוסחה) בעוד שפונקציה אשר נתונה על ידי ביטויים אחדים נחשבה אי-רציפה. לדוגמה, עבור אוילר הפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x, & x>0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$$

הייתה אי-רציפה, בעוד שהפונקציה המורכבת משתי זרועותיה של היפרבולה נחשבה לרציפה, מאחר והיא ניתנה על ידי הביטוי היחיד $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$. (ר' [16], עמ' 301).

העבודה על טורי-פורייֶה הצביעה על חוסר היכולת להגן על רעיון הרציפות של המאה ה-18. לדוגמה, הפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-1, & -\pi < x < 0\\ 0, & x = 0\\ 1, & 0 < x < \pi\end{cases}$$

ניתנת (כפי שראינו) לייצוג על ידי ביטוי יחיד, שהוא טור-פורייה שלה, ולכן לפי מובנו של המושג רציפות במאה ה-18, הייתה בעת ובעונה אחת הן רציפה והן אי-רציפה.

בעבודה משנת 1821 פתח קושי (Cauchy) בהערכה מחודשת ובארגון מחדש של יסודות החדו"א של המאה ה-18. בעבודה זו הגדיר קושי את הרציפות למעשה כפי שאנו מבינים מושג זה כיום, למרות שהוא השתמש בשפה של אינפיניטסימליים, שהייתה נפוצה אז, ולא בניסוח המקובל כיום של ε, δ אשר הוצג על ידי ויירשטרס (Weierstrass) באמצע המאה ה-19. המפנה בנקודת המבט מתפיסתו של אוילר של הרציפות לזו של קושי היה יסודי. אצל הראשון הייתה הרציפות תכונה גלובלית בעוד שאצל האחרון היא הייתה תכונה מקומית. אולם במהלך הזמן התברר שמושג הרציפות הוא מורכב ועדין ביותר, כך שאפילו קושי ובני-זמנו מתחילת המאה ה-19 עד מחציתה, לא הבינו אותו במלואו. למשל:

א. קושי "הוכיח" שסכום אינסופי (טור מתכנס) של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה ([4], עמ' 110). דבר זה, כמובן, אינו נכון. דוגמה נגדית ניתנה על ידי אַבֶּל (Abel) בשנות ה-20 של המאה ה-19 והיא בעצם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left[\left(2n+1\right)x\right]}{2n+1}$ שבו נתקלנו קודם, אשר מתכנס לפונקציה שאינה רציפה עבור $x = k\pi$, כאשר $k = 0, \pm1, \pm2...$.

הטעות בהוכחה של קושי נבעה מאי-יכולתו להבחין בין התכנסות לבין התכנסות במידה שווה של טור פונקציות.[7] למעשה, "ההכרה בתפקידו המרכזי של מושג ההתכנסות במידה שווה באנליזה התפתחה באיטיות במהלך המאה הקודמת" ([21], עמ' 97).

ב. הפונקציות הרציפות של אוילר היו, לאמיתו של דבר, גזירות (למעט אולי בנקודות מבודדות). כך גם אלו של קושי – לפחות כך האמינו קושי ובני-זמנו, וכך גם "הוכיחו" חלקם (ר' [26]). היה זה לכן מפתיע ביותר כאשר בשנות ה-60 של המאה ה-19 נתן ויירשטרס דוגמה

---

[7] אומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}u_k\left(x\right)$ מתכנס במידה שווה בתחום מסוים וסכומו $S(x)$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי $N(\varepsilon)$ שאינו תלוי ב- x כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k\left(x\right)-S\left(x\right)\right|<\varepsilon$$

לפונקציה רציפה שאינה גזירה בשום מקום, והיא - $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}b^n\cos\left(a^n\pi x\right)$ כאשר a הוא שלם אי-זוגי, b מספר ממשי בקטע (0,1) ו- $ab>1+\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. דוגמה זו ושכמותה הראו בפעם הראשונה שמושג הרציפות הוא לאין ערוך רחב יותר מזה של גזירות, וכך התמסד המושג רציפות כמושג עצמאי וראוי למחקר בזכות עצמו. הדוגמאות הצביעו גם על מגבלותיה של שיטת ההנמקה הגיאומטרית האינטואיטיבית באנליזה, וכך הובלט הצורך בניסוחים אנליטיים זהירים של רעיונות בסיסיים.

בפיתוח מודרני מסוג אחר הראו שוורץ וסובולֶב בשנות ה-40 של המאה ה-20 שכל פונקציה רציפה היא אכן "גזירה". אולם הנגזרת היא מעתה "פונקציה מוכללת" ("התפלגות"). לדוגמה:

אם
$$f\left(x\right)=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

אזי
$$f'\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \infty, & x=0\end{cases}$$

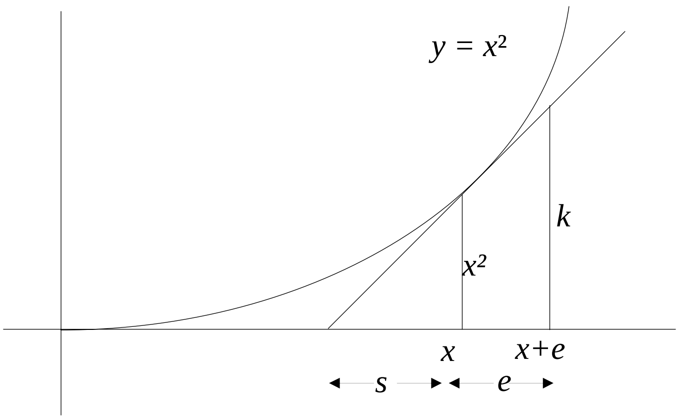
שהיא $\delta\,(x)$ "פונקציית" דלתא של דיראק (Dirac). כפי שמראה דוגמה זו, קיימות אפילו פונקציות אי-רציפות שהן גזירות (במובן של שוורץ/סובולב) – הכרה מזעזעת (הייתה יכולה להיות) עבור המתמטיקאים של המחצית השנייה של המאה ה-19.

פרדוקסים העוסקים באספקטים אחרים של החדו"א (חוץ מרציפות)

(א) החשבון הדיפרנציאלי והאינטגראלי (חדו"א) הומצא על ידי ניוטון ולייבניץ (באופן בלתי תלוי) בשליש האחרון של המאה ה-17. אולם רבים מהרעיונות החשובים הופיעו כסימן לבאות כבר בעבודותיהם של מתמטיקאים ידועים, ובמיוחד אצל פֶּרמָה (Fermat), בתחילת המאה ה-17. בשנות ה-30 המאוחרות של המאה ה-17 הוא פיתח שיטה לטיפול בבעיות של משיקים ונקודות מקסימום ומינימום. הדוגמה הבאה מדגימה את גישתו של פרמה (ר' [8], עמ' 122): נניח שברצוננו למצוא את המשיק לפרבולה $y=x^2$ בנקודה כלשהי $(x\,,\,x^2)$ תהיה $x+e$ נקודה סמוכה על ציר ה-x. על ידי דמיון משולשים נקבל:

$\frac{k}{s+e}=\frac{x^2}{s}$ (ר' תרשים). פרמה מציין ש-k "שווה בערך" ל- $(x+e)^2$.

אם נרשום $k\approx(x+e)^2$ נקבל $\frac{x^2}{s}\approx\frac{\left(x+e\right)^2}{s+e}$.



מכאן,
$$(s + e)\, x^2 \approx s\, (x + e)^2$$
$$s\,(x+e)^2 - sx^2 \approx ex^2$$
$$s \approx \frac{ex^2}{(x+e)^2 - x^2} = \frac{ex^2}{x^2 + 2ex + e^2 - x^2} = \frac{ex^2}{e(2x+e)} = \frac{x^2}{2x+e}$$

לפיכך ,
$$\frac{x^2}{s} \approx 2x + e$$

בשלב זה פרמה "מוחק" את e וטוען ש- $\frac{x^2}{s}$ שהוא השיפוע של המשיק לפרבולה ב(x,x^2) ,

הוא $2x$.

שיטתו של פרמה ספגה ביקורת קשה מצד חלק מבני-זמנו. הם התנגדו להצגה ולהזנחה שלאחריה של e המסתורי. חילוק ב-e (צמצום) פירושו התייחסות אליו כאל שונה מאפס. הזנחת e מצביעה על התייחסות אליו כאל אפס. דבר כזה אינו קביל, הם טענו בצדק. בהקשר מעט שונה, אך עם הצדקה דומה, מתייחס בישוף בֶּרְקְלִי (Berkeley) במאה ה-18 אל ערכי e שכאלה כאל "רוחות רפאים של גדלים מן העבר" בטענו ש"בזכות טעות כפולה. . .לא מגיעים אמנם למדע, אבל בכל אופן מגיעים לאמת". ([13], עמ' 428).

ההצדקה לאלגוריתמים של החדו"א של המאה ה-17 וה-18 הייתה שהם נתנו תוצאות נכונות – דוגמה חשובה נוספת לשימושיות של פרוצדורות "חסרות משמעות" (ר' לעיל פרדוקס-על בחלק הראשון של המאמר). נראה שהמטרה הצדיקה את האמצעים. ביסוס קפדני של החדו"א הושג עם הצגת מושג הגבול בשנת 1821 על ידי קושי. ביסוס קפדני מסוג אחר הושג עם הצגת האינפיניטיסימלים בשנת 1960 על ידי רובינזון (Robinson). מכאן –

פרדוקס-על: כיצד יכול החדו״א להיות מבוסס על שתי תיאוריות שונות, שבמובנים מסוימים אינן עולות בקנה אחד: גבולות – המבוססים על המספרים הממשיים, ואינפיניטיסימלים – המבוססים על המספרים ההיפר-ממשיים? או, כפי שניסח זאת לין סְטִין (Steen): ״הבסיס האפיסטמולוגי של האנליזה רחוק מלהיות מיושב״ ([22], עמ׳ 92).

(ב) טורי-חזקות היו כלי רב-עוצמה בחדו״א של המאה ה-17 ובמיוחד של המאה ה-18. טיפלו בהם כפולינומים לכל דבר, כמעט מבלי להקדיש תשומת לב כלשהי לשאלות של התכנסות. למעשה, אוילר ואחרים השתמשו במודע בסדרות מתבדרות לתועלתם המרובה. התוצאות שנתקבלו בצורה זו היו מרשימות וחשובות, אולם יחד עם זה, טעויות ופרדוקסים הפכו לבלתי-נמנעים. הנה שניים:

1. יש, ללא ספק, מעט מן המטפיזי באינסוף המתמטי. הדוגמא הבאה, שמיוחסת לאוילר, מאשרת זאת ([13] עמ׳ 447):

על ידי הצבת $x = -1$ בביטוי $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$

הוא קיבל: (*) $\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$

על ידי הצבת $x = 2$ בביטוי $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

מתקבל: (**) $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

היות וכל ביטוי באגף ימין של (**) גדול או שווה לביטוי המתאים באגף ימין של (*), הרי ש- $-1 > \infty$. מאידך ברור ש- $\infty > 1$. מכאן ש- $-1 > \infty > 1$. אוילר מסיק ש- ∞ חייב להיות סוג של חוצץ בין המספרים החיוביים לשליליים, ובמובן זה הוא דומה ל- 0 .

2. לעתים נהנו המתמטיקאים של המאה ה-17 וה-18 מאמנות המניפולציה של טורים ללא סיבה טובה יותר (כך נראה) מאשר על מנת להפגין את תעוזתם. לדוגמה:

הצבת $x = 1$ בטור $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ נותנת

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

עד כאן הכול טוב ויפה. אולם עתה, כך התפתח הטיעון האגף הימני שווה ל :

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots\right) = 0$$

ולכן $\log 2 = 0$ רק באמצע המאה ה-19 רימַן (Riemann) התיר פרדוקס זה בעזרת ההוכחה שסכום של טור המתכנס בתנאי יכול לקבל, עם סידורו מחדש, כל ערך שהוא.

"גילויו של פרדוקס זה הביא למעשה לבחינה מחודשת ולייסוד קפדני מחמיר. . .של תורת הטורים האינסופיים" ([21], עמ' 30).

פרדוקסים העוסקים בקבוצות

במשך קרוב לשלושים שנה, בסוף המאה ה-19, פיתח קנטור (Cantor) רעיונות חשובים רבים בתורת הקבוצות, תוך שימוש אינטואיטיבי ("נאיבי") במושג של קבוצה. ברבות הימים התברר שהמושג שלו בלתי-מספק ואף מוביל לפרדוקסים, שהמוכר ביותר מביניהם הוא כנראה הפרדוקס הקלאסי של ראסֶל(Russell) משנת 1902:

תהי $R = \{x : x \notin x\}$, אזי $R \in R$ אם ורק אם $R \notin R$.

לפרדוקס זה הייתה השפעה עמוקה על מתמטיקאים לא מעטים. (ר' [19]). הוא הרס את הלוגיקן פְרֶגֶה (Frege), אשר בדיוק באותה עת השלים עבודה בשני כרכים אודות יסודות האריתמטיקה. בלומדו על הפרדוקס של ראסל, הוא קונן ([13], עמ' 1192):

> קריסת היסודות בדיוק ברגע הסיום של העבודה הנשענת עליהם, היא הדבר הכי פחות רצוי שיכול לקרות למדען. מכתבו של מר ברטרנד ראסל שהתקבל כאשר הדפסת עבודתי עמדה להסתיים העמיד אותי במצב כזה.

מצד שני, היו לפרדוקסים של תורת הקבוצות גם השפעות חיוביות. בפרט, הם עוררו מתמטיקאים לתת משמעות מדויקת למושג של קבוצה על ידי פיתוח יסודות אקסיומטיים שונים לתורת הקבוצות (לדוגמה האקסיומות של צֶרמֶלו-פרנקל (Zermelo-Fraenkel), תורת הטיפוסים של ראסל ווייטהד(Whitehead), מערכת גֶדֶל-בֶּרנֵייז (Gödel-Bernays). למרות שמערכות אקסיומטיות מסוג זה עקפו את הפרדוקסים המוכרים, הן לא הבטיחו שחדשים לא יתעוררו. כפי שמנסח זאת בציוריות פואַנקָארֶה (Poincaré) ([13], עמ' 1186):

> הקמנו גדר סביב העדר על מנת להגן עליו מפני הזאבים, אך איננו יודעים אם עוד קודם לכן לא היו כבר זאבים אחדים בתוך הגדר.

הנה שני פרדוקסי-על הנובעים מעבודתו של קנטור בתורת הקבוצות:

פרדוקס-על 1: לאינסוף יש גדלים שונים; לאמיתו של דבר, יש לו לאינסוף, אינסוף גדלים שונים.

הפרדוקס-על השני נובע מהצבתם של שני הציטוטים הבאים של פואנקארה ושל הילברט(Hilbert), בהתאמה, בסמיכות זה לזה ([13], עמ' 1003):

פרדוקס-על 2:

- "הדורות הבאים יראו בתורת הקבוצות מגפה ממנה החלמנו".
- "איש לא יגרש אותנו מגן העדן אותו יצר למעננו קנטור".

פרדוקסים העוסקים בעקומים

מושג העקום הוא, כמובן, בסיסי בגיאומטריה. עבור אוקלידס משמעותו הייתה "אורך חסר-רוחב". אוסף העקומים המוכרים לבני-זמנו היה קטן – חתכי החרוט, הקונכואידה, הספירלה, העקומים הריבועיים ועוד מעטים. המצב השתנה באופן דרמטי עם המצאת הגיאומטריה האנליטית במאה ה-17. מעתה כל משוואה בשני משתנים הפכה למייצגת עקום (מישורי), אף כי "למתמטיקאים של המאה ה-17 לא הייתה הגדרה אחידה של מושג העקום (והם כנראה גם לא הרגישו צורך בהגדרה שכזאת)" ([3], עמ' 296). העיסוק בחקר העקומים נמשך בלהט במשך שלוש המאות הבאות, תוך שהנושא מושך אליו כמה מהמתמטיקאים הטובים ביותר אשר תקפו אותו באמצעים גיאומטריים, אנליטיים, אלגבריים, אריתמטיים וטופולוגיים.

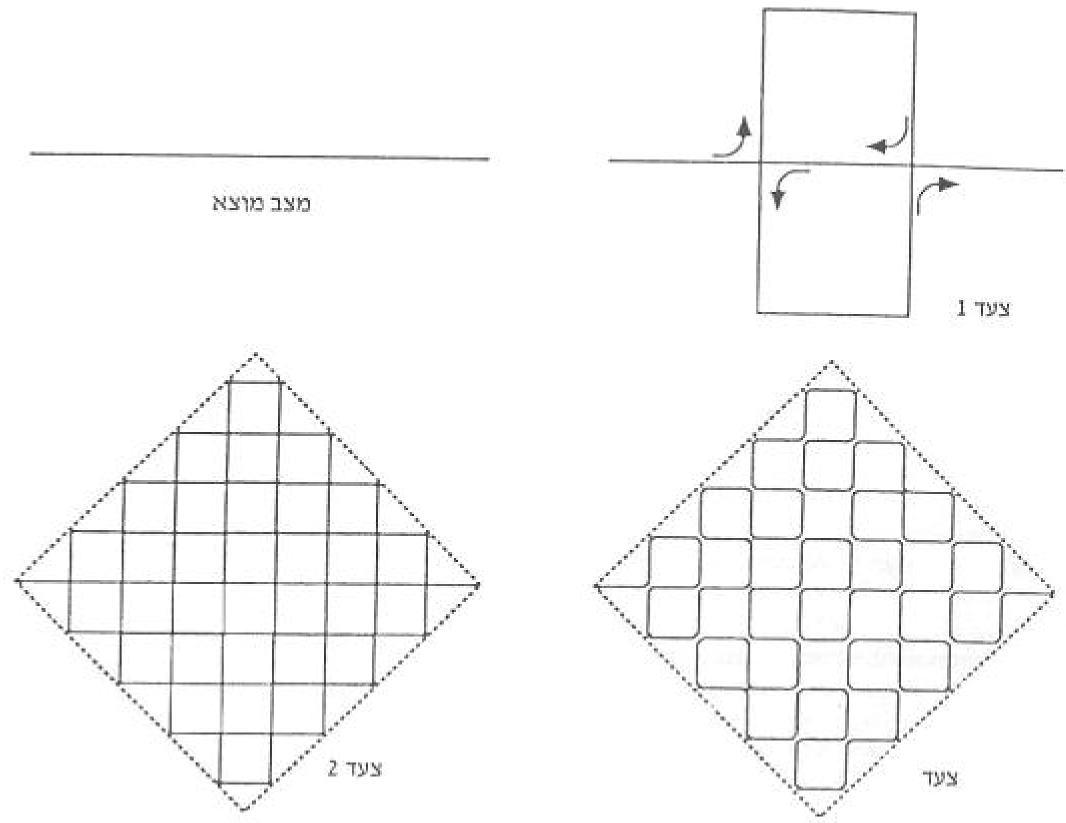
פונקציות "פתולוגיות" אשר הוצגו במחצית השנייה של המאה ה-19 עוררו שאלות בדבר טבעם של העקומים. לדוגמה, באיזה מובן פונקציה רציפה שאינה גזירה בשום מקום מייצגת עקום? ג'ורדָן (Jordan) השיב על כך (בשנת 1887) בעזרת ניסוח שהפך להיות ההגדרה הפורמלית הראשונה של עקום (למעט אולי זו של אוקלידס). עקום היה עבורו המסלול של נקודה הנעה בצורה רציפה. ליתר דיוק עקום היה

$\{\, (f(t)\, ,\, g(t)) | f\, ,\, g : [0,1] \to R$ רציפות הן פונקציות $g\, ,\, f \,\}$.[8]

בשנת 1890 נתן פֵּיאָנו (Peano) את הדוגמה המפורסמת והמדהימה של "העקום הממלא חלל", כלומר, הוא הציג מיפוי רציף של קטע היחידה על ריבוע (כולל חלקו הפנימי). (אופן בנייתו מתואר באיור מס. 1 . עוד עקום הממלא ריבוע מופיע באיור מס. 2) . אולם זה, לפי הגדרתו של ג'ורדן, הפך את הריבוע לעקום – מצב עניינים לגמרי לא רצוי. "כיצד יתכן שהאינטואיציה תוליך אותנו שולל עד כדי-כך?" תהה פואנקארה ([24], עמ' 123). הגדרתו של ג'ורדן הייתה רחבה

[8] זהו המושג של עקום שבמסגרתו ג'ורדן ניסח והוכיח (באופן מוטעה, כפי שהתברר בהמשך) את המשפט הידוע כמשפט עקום ג'ורדן.

מדי והכרחי היה לשנותה.



איור מס. 1 : בנית עקום פיאנו

יחד עם זאת, הגדרתו של ג׳ורדן התבררה גם כצרה מדי. שכן, ללא ספק, רצוי שהגרף של $y = sin\frac{1}{x}$ עם נקודות הגבול שלו על ציר ה-y, כלומר :

$$\left\{\left(x, sin\frac{1}{x}\right): x \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)\right\} \cup \left\{\left(0, y\right): -1 \le y \le 1\right\}$$

ייקרא בשם ״עקום״, אולם גרף זה אינו מסלולה של נקודה הנעה ברציפות.[9]

פרדוקס-על: כיצד יכולה הגדרה להיות בעת ובעונה אחת גם צרה מדי וגם רחבה מדי?

פתרון משביע רצון של הדילמה הושג רק בשנות ה-20 של המאה ה-20, על ידי מֶנגֶר (Menger) ויוריסון (Uryson) . ראשית היה צורך להבהיר את המושג מימד ([18]).[10] כאשר דבר זה נעשה,

9 דבר זה מובן מבחינה אינטואיטיבית למרות שכדי להוכיח זאת אנו זקוקים למושגים טופולוגיים, (ר׳ [11], עמ׳ 1968).

10 גם על רעיון זה קראה תיגר עקומת פיאנו הפרדוקסלית אשר רמזה על כך שריבוע הוא חד-מימדי מאחר שהוא התמונה הרציפה של קטע היחידה. הוכחתו של קנטור על קיום התאמה חד-חד-ערכית בין קטע לבין ריבוע הבנוי עליו, העמידה בספק גם את הרעיון האינטואיטיבי של המימד.

הוגדר העקום כרצף חד-מימדי (ר' [28]).[11] הגדרה זו הוכיחה עצמה כמספקת עד לשנות ה-70 שבהן הציג מנדלברוט (Mandelbrot) את הפרקטלים שלו, אשר מימדיהם הם שברים. (ר' [9]).

פרדוקסים העוסקים בפירוק והרכבה של גופים גיאומטריים

א. בשנת 1924 הוכיחו בָּאנָך (Banach) וטָרְסְקִי (Tarski) שהשמש וגרגר אפונה הם שקולי-פריקות. כלומר, ניתן לחתוך את האפונה למספר סופי של חלקים[12] כך שעל ידי סידורם מחדש אפשר להרכיב מהם את השמש (בנפח אם לא בחומר). זהו פרדוקס בָּאנָך-טרסקי המפורסם (ר' [27]). למעשה באנך וטרסקי הראו שכל שתי קבוצות חסומות במרחב אוקלידי n מימדי R^n הן שקולות-פריקות אם הן מכילות נקודות פנימיות ואם $n > 2$ (ר' [2], עמ' 351).[13]

כמובן, החלקים שאליהם חותכים את גרגר האפונה בפירוק באנך-טרסקי אינם בני-מידה, כלומר, אין להם נפח. אין אלה מסוג החיתוכים אותם ניתן לבצע באמצעות מספריים או מכשירי חיתוך אחרים. הם מתקבלים על ידי שימוש באקסיומת הבחירה.[14]

פרדוקס-על: כיצד יכולות הנחות פשוטות (למשל, אקסיומת הבחירה) להיות בעלות תוצאות אדירות כל-כך (כמו פרדוקס בָּאנָך-טרסקי)?

ככלות הכול, אקסיומת הבחירה איננה הנחה פשוטה כל כך, כמובן (ר' [19]), אולם היא הייתה יכולה להיות שימושית מאוד עבור תושבי העיר דֶלוס ביוון העתיקה ([27], עמ' v):

הדֶלים: "כיצד נוכל להיפטר מהמגפה?"

האוראקל מדֶלפי: "בנו מזבח קובייתי, כפול בגודלו מהמזבח הקיים".

באנך וטרסקי: "האם מותר לנו להשתמש לשם כך באקסיומת הבחירה?"

ב. "סוף כל סוף, ריבענו את העיגול." אין זו מתיחה. זהו שמו של מאמר אשר הופיע לאחרונה בעיתון הנודע: *Notices of the American Mathematical Society* [10]. בשנת 1988 הראה המתמטיקאי ההונגרי לסקוביץ' (laczkovich) שאפשר לפרק את העיגול למספר סופי של חלקים אותם ניתן לחבר מחדש ולקבל ריבוע בעל אותו שטח. אולם החלקים אינם בני-מידה (לאף אחד מהן אין שטח) וקיומו של הפירוק מובטח על ידי שימוש באקסיומת הבחירה (ר' [10]).

לסיכום

[11] רצף (continuum) הוא קבוצה סגורה, קשירה של נקודות.

[12] בשנות ה-40 של המאה ה-20 הוכח שמספיקות חמש חתיכות; למעשה, שום מספר קטן מחמש לא יספק.

[13] אם מתירים פירוקים (אינסופיים) ברי-מנייה, אזי תוצאה זו תופסת גם עבור $n = 2$ (ר' [2], עמ' 351).

[14] אכסיומת הבחירה מאפשרת לבחור מכל קבוצה תת-קבוצה מבלי לציין איך ייבחרו האיברים של תת-הקבוצה (צרמלו 1904). כהן (1963) הוכיח שהיא בלתי-תלויה ביתר האכסיומות של תורת הקבוצות.

הצגנו מגוון פרדוקסים מתמטיים מתקופות היסטוריות שונות. הם נבעו (בין היתר) מתוך ויכוחים ומחלוקות בין מתמטיקאים, דוגמאות נגדיות למושגים שנחשבו לבלתי-ניתנים לשינוי, אי-יכולת לראות את הצורך בצמצום או הרחבה של מושג או של תוצאה, ומתוך יישומו של "עקרון ההמשכיות", אשר מצביע על אפשרות העברה של פרוצדורות ממקרה נתון למקרים שנתפסו כדומים. ראינו שתופעות פרדוקסליות כאלו היו בעלות השפעה מהותית ביותר על התפתחות המתמטיקה דרך העדנה ועיצוב מחדש של מושגים, הרחבת תורות קיימות ועלייתן של תורות חדשות. יתר על כן, תהליך זה הוא תהליך מתמשך אשר מתרחש גם בימינו.

לפרדוקסים יש לדעתנו מקום בהוראה ובלימוד המתמטיקה. הם יכולים לעורר סקרנות, להגביר את המוטיבציה, ליצור סביבה פורה לדיון, לעודד בחינה של ההנחות הבסיסיות, ולהראות שלוגיקה שגויה וטיעונים מוטעים אינם תכונה נדירה של העשייה המתמטית.

רשימת ספרות

1. E.T. Bell, *The Development of mathematics*. 2-nd ed. McGraw-Hill, 1945.
2. L.M. Blumenthal, “A paradox, a paradox, a most ingenious paradox” *Amer. Math. Monthly* 47 (1940): 346-353.
3. H.J.M. Bos. “On the representation of curves in Descartes”, *Geometrie, Arch. Hist. Ex. Sc.* 24 (1981): 295-338.
4. U. Bottazzini, *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass,* Springer – Verlag, 1986.
5. F. Cajori, “history of exponential and logarithmic concepts”, *American Mathematical Monthly* 20 (1913), several issues.
6. P.J. Davis, “Number”, *Scientific American,* 211 (Sept. 1964): 51-59.
7. ______ *The mathematics of matrices*, Blaisdell, 1965.
8. C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*. Springer-Verlag, 1979.
9. M. Gardner, “Mathematical games, in which “monster” curves force redefinition of the word “curve”, *Sc. Amer.* 235 (Dec. 1976), 124-133.
10. R.J. Gardner and S. Wagon, “at long last the circle has been squared”, *Notic. Amer. Math. Soc.* 36(1989): 1338-1343.
11. H. Hahn, “The crisis in intuition”. In: *The World of Mathematics*, ed. By J.R. Newman, Simon & Schuster, 1956, Vol. 3: pp. 1956-1976.
12. E. Kasner and J.R. Newman, *Mathematics and the imagination,* Simon & Schuster, 1976.
13. M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972.
14. Leapfrogs, *Imaginary logarithms*, E.G.M. Mann & Son (England), 1978.
15. _________ *Complex numbers*, E.G.M. Mann & Son (England), 1980.
16. J. Lutzen, “Euler’s vision of a generalized partial differential calculus for a generalized kind of function”, *Mat. Mag.* 56 (1983): 299-306.
17. P. Marchi, “The controversy between Leibniz and Bernolli on the nature of the logarithms of negative numbers”. In: *Akten das II Inter. Leibnez-Kongress* (Hanover, 1972), Bnd II, 1974: 67-75.
18. K. Menger, “What is dimension”, *Amer. Math. Monthly* 50 (1943): 2-7.
19. G.H. Moore, *Zermelo’s axiom of choice: its origins. Development and influence*, Springer-Verlag, 1982.
20. E. Nagel, “Impossible numbers: a chapter in the history of modern logic”, *Stud. In the Hist. Of Ideas* 3 (1935): 429-474.
21. R. Remmert, *Theory of complex functions*, Springer-Verlag, 1991.

22. L.A. Steen, “New models of the real-number line”, *Sc: Amer.* 225 (Aug. 1971): 92-99.

23. B/L/ Van der Waerden, *Science awakening I*, Scholar’s Bookshelf, 1988(orig 1954).

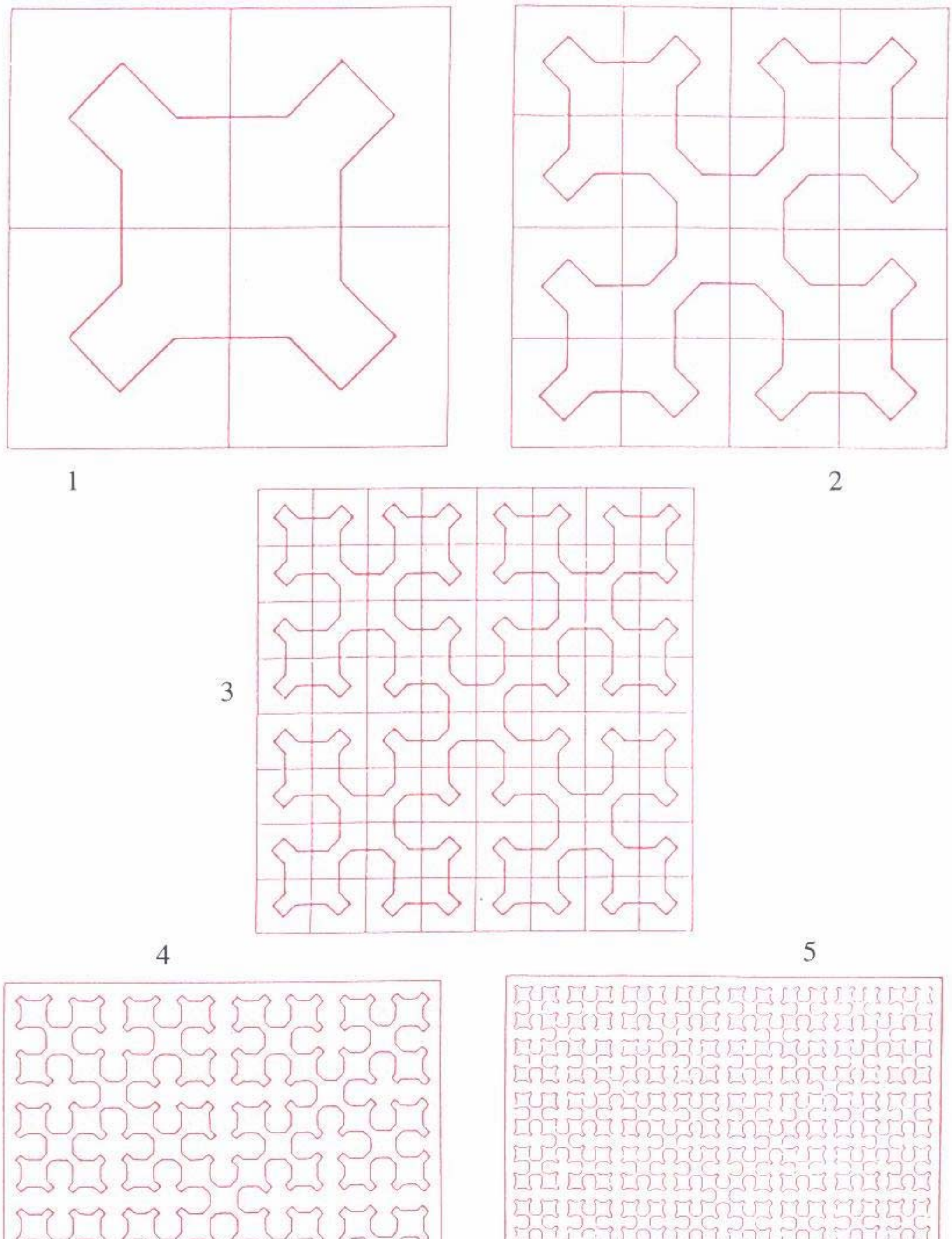
24. N. Ya. Vilenkin, *Stories about sets*, Academic Press. 1968.

25. K. Volkert, “Die Geschichte der pathologischen Funktionen – Ein Beitrag zur Enstehung der mathematischen Methodologie”, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 37 (1987): 193-232.

26. __________ “Zur der Differentzierbarkeit stetiger Funktionen – Ampere’s Beweis und seine Folgen”, *Arch. Hist. Ex. Sc.* 40 (1989): 37-112.

27. S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press. 1985.

28. GT. Whyburn, “What is a curve?” *Amer. Math. Monthly* 49 (1942): 493-497.



איור מס. 2 עוד עקום הממלא ריבוע