הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״**קשר-חם**״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

# הנושא : **מתמטיקה בימי הפרעונים**

הוכן ע״י : ד״ר עטרה שריקי.

תקציר : בחומר מובאת סקירה של ההתפתחות ההיסטורית של המתמטיקה בתקופת הפרעונים – המצרים הקדמונים. הסקירה כוללת דוגמאות של בעיות מתמטיות שבהם עסקו המצרים בנושאים : כפל וחילוק, שברים, שורשים ריבועיים, משוואות ממעלה ראשונה ושניה, סדרות חשבוניות והנדסיות, ובעיות גיאומטריות במישור ובמרחב.

מילות מפתח : היסטוריה של המתמטיקה, מצרים, פרעונים, פפירוס רינד, פפירוס מוסקבה, סילבסטר, כתב הירוגליפי, כתב היראטי, פעולות חשבון, מספרים טבעיים, כפל, חילוק, שיטת הכפל המצרי, שיטת החילוק המצרי, מספרים רציונליים, שברים, שבר יחידה, שורש ריבועי, בעיות מילוליות, אלגברה, טכניקה אלגברית, משוואה ממעלה ראשונה, משוואה ממעלה שניה, מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, סדרות, סדרה חשבונית, סדרה הנדסית, הנדסה, גיאומטריה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, היקף, שטח, משולש, מרובע, מלבן, מעגל, הנדסת המרחב, גיאומטרית המרחב, נפח, פירמידה, פירמידה קטומה.

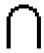
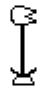
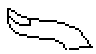
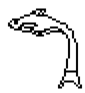
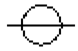
החומר הוגש במסגרת : בי״ס קיץ בנושא ״שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה״, שנה״ל תשס״ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 14 עמודים.

# מתמטיקה בימי הפרעונים

המצרים השתמשו בכתב הירוגליפי גם בסימון מספרים ואלה הם הסימנים:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | II | III | IIII | III<br>II | III<br>III | IIII<br>III | IIII<br>IIII | IIIII<br>IIII |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 10 | 100 | 1000 | 10,000 | 100,000 | 1,000,000 | 10,000,000 |
| vertical stroke | heel-bone arch | coil of rope | lotus flower | pointing finger | burbot fish or tadpole | astonished man | rising sun |

כל המספרים האחרים נכתבו באמצעות המספרים הנ״ל. הכתיבה הייתה בעיקר מימין לשמאל ולעיתים מלמעלה למטה. בהתחלת המספר כתבו סימנים עם ערך גדול ביותר והמשיכו לפי סדר ירידת ערך הסימנים. בשיטה זו לכל סימן היה ערך מספרי יחיד, לא תלוי במיקום בתוך המספר.

**האם בשיטה העשרונית לכתיבת מספרים, שבה אנו משתמשים היום, הערך המספרי של כל סיפרה תלוי במיקומה במספר?**

**האם גודל המספר קשור למספר התווים הדרושים בכתב ההירוגליפי?**

**האם המצרים ספרו בבסיס 10?**

## כפל מצרי

ההיסטוריה של המתמטיקה מתארת את שיטת הכפל המצרי כ"מגושמת ומוזרה". נראה כי תרמה לכך שיטת הסימון האריתמטי. יש לציין שעד למאה ה-16, תוכנית הלימודים במתמטיקה בבתי הספר לא כללה לימוד של פעולת הכפל, כך שלמרות הביקורת על שיטת הכפל המצרי, נראה שהמצרים היו מתקדמים מאד בשיטותיהם.
מהפפירוסים שנמצאו עולה שאחת השיטות המקובלות הייתה השיטה של "חיבור חוזר". שיטה אחרת חייבה שימוש בלוח הכפל שבו כפולות של 2 בלבד. להלן נדגים את השיטה:

יש לבצע את הפעולה: $7\cdot13$

| | |
|---|---|
| 1 | 13 |
| 2 | 26 |
| 4 | 52 |
| 7 | 91 |

יש לבצע את הפעולה: $21\cdot22$

| | |
|---|---|
| 1 | 22 |
| 2 | 44 |
| 4 | 88 |
| 8 | 176 |
| 16 | 352 |
| 21 | 462 |

**הסבירו את שיטת הכפל המצרי.**

**היעזרו בשיטת הכפל המצרי על מנת לבצע את הפעולות: $45\cdot8$ ; $37\cdot11$.**

## חילוק מצרי

בדומה לפעולת החיסור, אותה ביססו על פעולת החיבור, כך גם את פעולת החילוק ביססו על פעולת הכפל. נניח שברצוננו לבצע את הפעולה: 184:8. הפעולה תתבצע באופן הבא:

| | |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 2 | 16 |
| 4 | 32 |
| 8 | 64 |
| 16 | 128 |
| 23 | 184 |

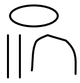
מכאן: $184:8 = 23$

**הסבירו את שיטת החילוק המצרי.**

**היעזרו בשיטת החילוק המצרי על מנת לבצע את הפעולות:** 153:9 ; 250:25

## שברים

שיטת הסימון המצרית גרמה לכך שהמצרים השתמשו רק בשברי יחידה (שברים שהמונה שלהם הוא 1), למעט יוצא דופן אחד – השבר $\frac{2}{3}$.

הסיבה לכך היא שהסימון עבור שבר היה באמצעות השמת הסימון ההירוגליפי  (פה פתוח) מעל למספר. כך, למשל, המספר  הוא השבר $\frac{1}{12}$.

כאשר החלו לכתוב בכתב ההיראטי, ה"פה הפתוח" הפך לנקודה קטנה, אשר סומנה מעל לסימן המייצג את 10. לכן, ניתן היה לטעות ולחשוב שמדובר ב - $2+\frac{1}{10}$.

כל שבר, מלבד $\frac{2}{3}$, הוצג על-ידי המצרים כסכום של שברי יחידה. לדוגמא:

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \quad ; \quad \frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}$$

המצרים, מתוך עניין, חיפשו אחר הצגות של שברים כך שבסכום שברי היחידה לא תהיה חזרה.

ברור שכל שבר מהסוג $\frac{m}{n}$ ניתן להציג כ – $m$ סכומים של השבר $\frac{1}{n}$, אך אין בכך כל אתגר.

בשנת 1880 הציג המתמטיקאי סילבסטר הוכחה לכך שכל שבר בין 0 ל- 1 ניתן להצגה כסכום של שברי יחידה שונים. להלן נציג דרך אפשרית לקבלת שבר כסכום של שברי יחידה שונים.

לדוגמא, ניקח את השבר $\frac{2}{5}$. שבר היחידה הקרוב לו ביותר, אך קטן ממנו, הוא $\frac{1}{4}$. נחשב את ההפרש בין שניהם: $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{8-5}{20}=\frac{3}{20}$. עתה נרשום את ההפרש שהתקבל, באמצעות שברי יחידה. שבר היחידה הקרוב לו ביותר, אך קטן ממנו, הוא $\frac{1}{7}$. נחשב את ההפרש ביניהם: $\frac{3}{20}-\frac{1}{7}=\frac{21-20}{140}=\frac{1}{140}$. לכן, סה"כ קבלנו באמצעות שיטה זו: $\frac{2}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}$.

**רישמו באמצעות סכום שברי יחידה את השברים**: $\frac{4}{15}\ ;\ \frac{3}{11}$

## בעיות הקשורות לשברי יחידה

**בעיה מס׳ 1**

נתון מלבן שמידות האורך של צלעותיו הן $a$ ו- $b$, כאשר $a$ ו- $b$ הם מספרים שלמים.

מכאן שמידת היקפו ________ ומידת שטחו ___________.

מובן שאת ההיקף ואת השטח מודדים ביחידות מידה שונות לגמרי. את ההיקף מודדים ביחידות אורך, למשל, ס״מ. לעומת זאת מודדים את השטח ביחידות שטח, למשל, סמ״ר.

האם, לדעתכם, קיימים מלבנים אשר עבורם המספר המבטא את מידת ההיקף שווה למספר המבטא את מידת השטח?

אם לא – הסבירו מדוע. אם כן – כמה מלבנים כאלה קיימים לדעתכם?

בדקו את השערתכם.

**בעיה מס׳ 2**

בכמה דרכים ניתן, לדעתכם, להציג את המספר 1 כסכום של שברי יחידה שונים זה מזה?

בדקו את השערתכם.

האם ניתן להציג את 1 באמצעות סכום של 4 שברי יחידה? 5 שברי יחידה? בדקו.

**בעיות מתוך פפירוס EMLR**

בפפירוס מופיעות הדוגמאות הבאות:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{1}{8}\ ;\ \frac{1}{24}+\frac{1}{48}=\frac{1}{16}\ ;\ \frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{21}+\frac{1}{42}=\frac{1}{14}\ ;$$

$$\frac{1}{45}+\frac{1}{90}=\frac{1}{30}\ ;\ \frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{20}\ ;\ \frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10}\ ;\ \frac{1}{48}+\frac{1}{96}=\frac{1}{32}\ ;\ \frac{1}{96}+\frac{1}{192}=\frac{1}{64}$$

**האם ניתן להצביע על חוקיות מסוימת שהייתה ידועה למצרים?**

**נסו להוכיח חוקיות זו.**

בפפירוס נמצאו גם הדוגמאות הבאות: $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{8}$

**האם תוכלו למצוא את הכלל המתאים לשני מקרים אלה?**

**האם תוכלו להרחיב את הכללים שמצאתם, עבור שברי יחידה נוספים?**

הערה: למצרים לא היה סימון עבור פעולת החיבור, והם ציינו זאת על ידי כתיבת המספרים זה ליד זה. כאשר רצו לחסר בין מספרים כתבו (בכתב הירוגליפי או היראטי) את המילה המתאימה.

**בעיות מתוך פפירוס RMP**

**בעיות של חלוקה הוגנת**

בפפירוס רינד, RMP, נמצאה טבלה ובה המנות של חילוק המספרים $1,2,\ldots,9$ ב- 10 :

| המספר | המנה | המספר | המנה |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{10}$ | 6 | $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ |
| 2 | $\frac{1}{5}$ | 7 | $\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$ |
| 3 | $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ | 8 | $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ |
| 4 | $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ | 9 | $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$ |
| 5 | $\frac{1}{2}$ | | |

טבלה זו הוכנה עבור שש הבעיות הראשונות שבפפירוס.

לדוגמא :

**בעיה מס' 3 -** כיצד מחלקים 6 ככרות לחם בין 10 אנשים?

**בעיה מס' 3-** כיצד מחלקים 9 ככרות לחם בין 10 אנשים?

בשש הבעיות הראשונות יש לחלק 1,2,6,7,8,9 כיכרות לחם באופן שווה בין 10 אנשים. עבור כל שאלה מוצגת התשובה מהטבלה, ולאחר מכן בעזרת כפל מוכחת נכונותה.

**כיצד, לפי דעתכם, נבנתה הטבלה?**

**כיצד, לדעתכם, מוכחת נכונות הטבלה בעזרת פעולת הכפל?**

## שורשים ריבועיים

בפפירוסים מופיעים לעיתים קרובות ריבועים של מספרים רציונליים, אולם שורשים כמעט ואינם מופיעים. גם כאשר ישנם חישובים הדורשים הוצאת שורש ריבועי, הדרך לחישוב אינה מוצגת. סביר להניח שהיו למצרים טבלאות מוכנות של ריבועים אשר בהם נעזרו לצורך מציאת שורשים ריבועיים. טבלאות אלה סיפקו להם קירוב עבור שורשים שלא הופיעו בטבלה.

נניח שנרצה למצוא את $\sqrt{40}$. בהנחה שקיימות טבלאות, הרי שיופיע בהם :

| מספר | ריבוע המספר |
|---|---|
| $6+\frac{1}{4}$ | $39+\frac{1}{16}$ |
| $6+\frac{1}{3}$ | $40+\frac{1}{9}$ |

כך ש - $\sqrt{40}$ נמצא בין $6+\frac{1}{3}$ לבין $6+\frac{1}{4}$, וקרוב יותר ל- $6+\frac{1}{3}$.

אם קירוב זה איננו מספיק, אפשר להמשיך באמצעות כפל סטנדרטי. עבור הריבוע של $6+\frac{1}{4}$ מתקבל:

| | |
|---|---|
| $6+\frac{1}{4}$ | 1 |
| $12+\frac{1}{2}$ | 2 |
| 25 | 4 |
| $3+\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $39+\frac{1}{16}$ | $6+\frac{1}{4}$ |

היות והריבוע של $6+\frac{1}{3}$ גדול מ- 40, והיות ומתקיים: $\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+6=\frac{1}{3}+6$, הרי שצריך להוסיף ל- $6+\frac{1}{4}$ שבר יחידה הקטן מ- $\frac{1}{12}$.

**מצאו את הריבוע של $6+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$ באמצעות שיטת הכפל המצרית.**

**בכמה השתפר הקירוב עבור $\sqrt{40}$ ?**

## משוואות ממעלה ראשונה

רבים מאלה שבחנו את הפפירוסים המצריים סבורים שהמתמטיקה המצרית שימשה למטרות שימושיות בלבד, ונבנתה על בסיס של ניסוי וטעייה. המתנגדים לעמדה זו מאמינים שלמצרים היו כוונות מדעיות, וכי הם לא הגבילו את עצמם לאריתמטיקה של חיי היום-יום. להלן תוצגנה בעיות 24-34 מה- RMP. בעיות אלה עוסקות בשיטה לפתרון משוואות ממעלה ראשונה עם נעלם אחד. את הבעיות ניתן לסווג לשלוש קבוצות, בהתאם לדרגת הקושי שלהן: הקבוצה הראשונה מכילה את הבעיות 24-27, הקבוצה השנייה את הבעיות 28-29, והשלישית את הבעיות 30-34.

<u>**קבוצה ראשונה**</u>

**בעיה 24:** כמות ועוד $\frac{1}{7}$ ממנה שווה ל – 19. מהי הכמות?

**בעיה 25:** כמות ועוד $\frac{1}{2}$ ממנה שווה ל- 16. מהי הכמות?

**בעיה 26:** כמות ועוד $\frac{1}{4}$ ממנה שווה ל – 15. מהי הכמות?

**בעיה 27:** כמות ועוד $\frac{1}{5}$ ממנה שווה ל- 21. מהי הכמות?

נראה שכותב הפפירוס הציג ארבע בעיות דומות עם מספרים שונים כדי להציג גישה כללית לפתרון סוג זה של בעיות. בפפירוס רינד, מוצגת שיטה חכמה לפתרון הבעיות הללו. השיטה מבוססת על ניחוש ובדיקתו כמודגם להלן (אגב, עד סוף המאה ה- 19 שימשה השיטה המצרית של ניחוש ובדיקתו בהוראת מתמטיקה בארה"ב).

**פתרון בעיה 24**

נניח שהפתרון השגוי הוא 7. במקרה זה 1 ועוד $\frac{1}{7}$ של 7 שווה 8.

בכתיבה שלנו: $7\cdot(1+\frac{1}{7}) = 8$. לכן, המספר שבו נצטרך לכפול את 8 כדי להגיע ל-19, הוא המספר שבו יש לכפול את 7, על מנת למצוא את המספר המבוקש.

לכן, בשלב הראשון נחלק את 19 ב- 8.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | |
| ✔ 2 | **16** | |
| $\frac{1}{2}$ | 4 | |
| ✔ $\frac{1}{4}$ | **2** | |
| ✔ $\frac{1}{8}$ | **1** | |
| $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ | 19 | סה"כ |

עתה נכפול את $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ב- 7. נקבל:

| | | |
|---|---|---|
| | $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ | 1 ✔ |
| | $4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ | 2 ✔ |
| | $9+\frac{1}{2}$ | 4 ✔ |
| סה"כ | $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ | 7 |

בכתיב שלנו, מתקבל: $19=(1+\frac{1}{7})\cdot(16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8})$.

**בדקו...**

**פתרו את בעיות 25-27 בשיטת הניחוש.**

## <u>קבוצה שנייה</u>

בעיה 28: מחברים ביחד כמות ועוד $\frac{2}{3}$ ממנה, מפחיתים מהסכום $\frac{1}{3}$ ממנו, ונשאר 10. מהי הכמות?

**בעיה 29:** מחברים ביחד כמות ועוד $\frac{2}{3}$ ממנה, מוסיפים לסכום $\frac{1}{3}$ ממנו, מחסרים $\frac{1}{3}$ מהסכום, והתוצאה היא 10. מהי הכמות?

## <u>קבוצה שלישית</u>

**בעיה 30:** מהי הכמות ש: $\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$ ממנה נותנים 10?

**בעיה 31:** מחברים ביחד כמות, $\frac{2}{3}$ ממנה, $\frac{1}{2}$ ממנה, ו- $\frac{1}{7}$ ממנה, ומקבלים 33. מהי הכמות?

**בעיה 32:** מחברים ביחד כמות, $\frac{1}{3}$ ממנה ו- $\frac{1}{4}$ ממנה ומקבלים 2. מהי הכמות?

**בעיה 33:** מחברים ביחד כמות, $\frac{2}{3}$ ממנה, $\frac{1}{2}$ ממנה, ו- $\frac{1}{7}$ ממנה, ומקבלים 37. מהי הכמות?

**בעיה 34:** מחברים ביחד כמות, $\frac{1}{2}$ ממנה ו- $\frac{1}{4}$ ממנה ומקבלים 10. מהי הכמות?

הפתרונות לבעיות אלה באמצעות שברי יחידה הינם ארוכים לעיתים, ומורכבים. למרות זאת, לא נמצאו טעויות בפתרונות.

## משוואות ממעלה שנייה

שתי בעיות בפפירוס ברלין עוסקות במערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, אחת המשוואות ממעלה שנייה, ואחת מהן ממעלה ראשונה.

פפירוס זה נמצא במצב לא טוב, ולכן שיחזורו נתון היה למספר פרשנויות.

להלן אחת הבעיות:

השטח של ריבוע הוא 100 יחידות שטח, והוא שווה לשטח של שני ריבועים קטנים יותר.

הצלע של ריבוע אחד היא $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ מהצלע של האחר.

מהן צלעות שני הריבועים הקטנים?

**פתרו את הבעיה באמצעות מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים.**

הפתרון אותו הציע כותב הפפירוס:

תמיד קח ריבוע עם צלע 1.

אז הצלע של האחר היא $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$.

הכפל זאת ב- $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$, וזה נותן $\frac{1}{16}+\frac{1}{2}$, השטח של הריבוע הקטן.

יחד יש לשני הריבועים שטח של $\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+1$.

מצא את השורש הריבועי של $\frac{1}{16}+\frac{1}{2}+1$. זה $\frac{1}{4}+1$.

מצא את השורש הריבועי של 100. זה 10.

חלק 10 ב - $\frac{1}{4}+1$. זה נותן 8. הצלע של ריבוע אחד.

(ההמשך ניזוק, והשיחזור מראה שכפי הנראה היה כך:)

קח $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ מ- 8. זה נותן 6. הצלע של הריבוע האחר.

**הסבירו את הפתרון.**

# סדרות הנדסיות וחשבוניות

**סדרות הנדסיות**

היות והשיטה המצרית לביצוע פעולת הכפל הייתה לכפול בכל פעם ב- 2, אך טבעי היה שהם יתעניינו בסדרות מהסוג ...1,2,4,8,16. כיום, סדרות אלה מכונות בשם "סדרות הנדסיות. למעשה, הכפל המצרי מבוסס על העובדה שכל מספר טבעי ניתן לבטא כסכום של חזקות שונות של 2, וסכום זה הוא יחיד. לסדרה גיאומטרית שבה האיבר הראשון הוא 2 והמנה היא 2, יש תכונה מעניינת.

בפתרון בעיה מס' 76 בפפירוס רינד משתמש הכותב בתכונה הבאה:

$2 + 4 = 6 = 2\cdot(1 + 2)$

$2 + 4 + 8 = 14 = 2\cdot(1 + 2 + 4)$

$2 + 4 + 8 + 16 = 30 = 2\cdot(1 + 2 + 4 + 8)$

$2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62 = 2\cdot(1 + 2 + 4 + 8 + 16)$

**רשמו את שתי השורות הבאות.**

**כיצד ניתן להכליל את התכונה?**

**כיצד ניתן להוכיח את התכונה?**

**האם התכונה מתקיימת גם בסדרה עבורה האיבר הראשון שווה ל – 2 ומנתה 3? 4? 5? 1/2?**

**האם התכונה מתקיימת עבור כל סדרה הנדסית (גם כאלה בהן האיבר הראשון איננו 2)?**

**סדרות חשבוניות**

בבעיה מס' 40 בפפירוס רינד הכותב מדבר על סדרה חשבונית בת חמישה איברים, שבה סכום שלושת האיברים הגדולים גדול פי 7 מסכום שני האיברים הקטנים.

להלן הניסוח של בעיה 40:

100 כיכרות לחם ל- 5 אנשים. $\frac{1}{7}$ מ- 3 האנשים למעלה שווה ל- 2 האנשים למטה. מהו הפרש החלוקה?

בעיה מס' 64 בפפירוס רינד:

אם תתבקש לחלק 10 חבילות גריסים בין 10 אנשים כך שההפרש בין כל איש והשכן שלו בחבילות גריסים הוא $\frac{1}{8}$, מהו החלק של כל איש בחלוקה?

# בעיות גיאומטריות במישור ובמרחב

## בעיות במישור

פפירוס מוסקבה, שגם הוא נמצא במצרים, נכתב עוד לפני פפירוס רינד (הערכה – 1850 לפנה״ס). בניגוד לפפירוס רינד, לא ידוע מי כתב אותו. הוא מכיל 25 בעיות מתמטיות ונמצא במוזיאון של מוסקבה. פפירוס זה נקרא גם פפירוס גולנישצ׳ב, על שם האספן הרוסי שרכש אותו במחצית המאה ה- 19. אורכו כאורך פפירוס רינד אבל רוחבו כרבע ממנו.

בעיות רבות בפפירוס זה עוסקות בחישובים של שטחי אדמה ונפחיהם של כלים המשתמשים לצורך אכסון גרעינים. מתוך הכתבים עולה שהמצרים הכירו את הנוסחא לחישוב שטח משולש (מחצית המכפלה של אורך הצלע באורך הגובה לאותה צלע). בנוסף, ידעו למצוא שטחי מלבנים באמצעות הכפלת מידת האורך במידת הרוחב, כפי שמקובל כיום.

לדוגמא, בבעיה 49 ב- RMP נתון מלבן שאורכו 1000 אמות[1] ורוחבו 100 אמות, ומחפשים את שטחו. בבעיה 51 בפפירוס זה מוצאים שטח של משולש לפי מידות נתונות.

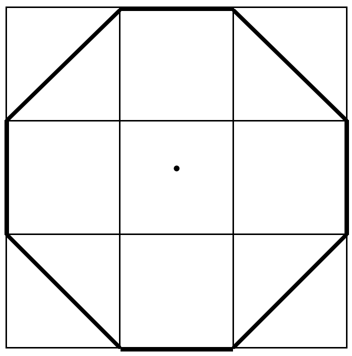
בבעיות העוסקת בחישוב שטח של עיגול, מתבצע החישוב על-ידי כך שמחסרים מאורך הקוטר תשיעית מאורכו, ומעלים בריבוע את מה שנשאר.

נדגים זאת באמצעות מעגל שקוטרו 9 יחידות אורך. נחסיר תשיעית מאורך הקוטר, ונקבל 8. נעלה את 8 בריבוע, ונקבל 64. שטח העיגול עבור מעגל שקוטרו 9 יחידות אורך, הוא 64 יחידות שטח.

**בהינתן שקוטר המעגל הוא d, מהו שטח העיגול, בהתאם להנחיות אלה?**

**באיזה קירוב של $\pi$ השתמשו המצרים?**

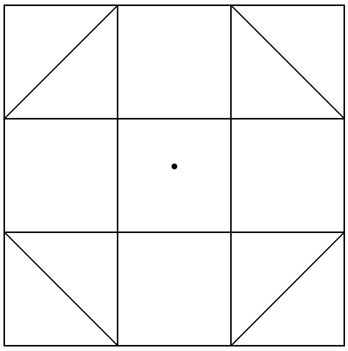
בעיה מס׳ 48 ב- RMP גם היא עוסקת במציאת שטח של עיגול. בעיה זו הינה ייחודית מבין 87 הבעיות שבפפירוס בכך שההצעה לפתרון, שבדרך כלל ניתן באופן מילולי, הוחלפה באיור הגיאומטרי הבא:



**מה ניתן להסיק מתוך האיור על המשמעות הגיאומטריות של חישוב שטח עיגול?**

[1] 1 אמה שקולה ל – 0.485 מ׳

אם נוסיף לשרטוט מעגל, ניתן להסיק שהכותב סבר ששטח המתומן הנ"ל קרוב דיו לשטח המעגל המבוקש. כמה מ'חלקי המעגל' נמצאים מחוץ למעגל וכמה מהם נמצאים בתוך המתומן, ומתוך התבוננות בשרטוט אכן שני השטחים נראים מספיק קרובים.

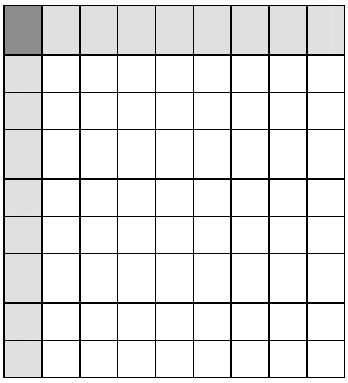


נתון עיגול שקוטרו $d$. שטח העיגול הוא כשטח המצולע בעל 8 צלעות המתקבל לאחר שמורידים את ארבעת המשולשים שווי השוקיים הפינתיים של ריבוע בעל צלע $d$, כך שכל שוק של המשולש היא שליש מצלע הריבוע.

**בידקו את שטחו של המעגל כאשר אורך צלע הריבוע הוא 9.**

**באיזה קירוב של $\pi$ השתמשו המצרים במקרה זה?**

דרך נוספת לפתרון ניתן למצוא בשרטוט הבא:



מכאן ניתן לראות בקלות ששטח מעגל שקוטרו 9 יחידות אורך (חסום בריבוע שאורך צלעו 9 יחידות), קרוב לשטח ריבוע שאורך צלעו 8 יחידות (האם הצליחו המצרים לתרבע את המעגל?...).

בנוסף לפפירוסים, ניתן היה ללמוד על המתמטיקה המצרית מתוך ציורי קיר. באחד המקדשים נמצאו על הקירות חישובים של שטחי שדות שצורתן מרובעת. שדות אלה היו מיועדים כמתנה לאלים. אחת הבעיות הייתה הבעיה הבאה (בסימון של ימינו):

נתון שדה מרובע. נסמן את אורכי צלעותיו ב – $a$ , $b$ , $c$, $d$ (לפי הסדר). על מנת לגבות מיסים, חישב גובה המיסים את שטח השדה לפי הנוסחא הבאה: $S = \frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4}$.

**האם נוסחא זו נכונה לכל מרובע?**

**בדקו עבור מרובעים שונים האם בשל שיטת החישוב גובה המיסים: הפסיד כסף, הרוויח כסף, קבל את המגיע לו.**

## בעיות במרחב - פירמידות ופירמידות קטומות

האם הפפירוסים והכתבים המצריים הקדומים מספקים מידע לגבי תכונות גיאומטריות ואריתמטיות של המבנים הגיאומטריים המפורסמים ביותר בעולם העתיק – הפירמידות הישרות? התשובה היא שכמעט ולא ניתן למצוא מידע כתוב על כך. כל מה שידוע כיום הוא שהכותבים ידעו לחשב את:

1. שיפוע המקצוע של הפירמידה.
2. נפח של פירמידה קטומה.
3. נפח של פירמידה.

לגבי הידע שלהם לחישוב נפח פירמידה ניתן ללמוד מהדרך שבה הציגו חישובים של נפח של פירמידה קטומה (בעיה 14 בפפירוס מוסקבה). כל שאר המידע שלנו כיום לקוח מתוך בעיות 56,57,58,59,60 בפפירוס רינד. הבעיות הללו פשוטות ועוסקות בשיפועי מקצועות של פירמידה ישרה, וזווית בין פאה לבין הבסיס.

**שיפוע**

להלן בעיה מס' 56 (בתרגום המידות למטרים. בסוגריים המידות המצריות המקוריות):

גובה 130.76 (250) בסיס 188.36 (360).

מהו שיפוע הפיאה?

הפתרון המוצע בפפירוס:

מצא $\frac{1}{2}$ מ- 360. זה 180.

חלק את 180 ב- 250, זה $\frac{1}{50}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$.

**מה מצאו המצרים בחישוב זה?**

יש לזכור שעל מנת לקבל את אותו שיפוע עבור כל אבן ואבן, היה על המצרים לשמר בקפדנות יחסים אלה. הבעיות האחרות בנושא זה דומות, למעט בעיה מס' 57 שבה נדרש היה למצוא את הגובה.

**נפח של פירמידה קטומה**

הבעיה היחידה שאיננה ב – RMP ועוסקת בפירמידות היא בעיה מס׳ 14 בפפירוס מוסקבה. מתוך בעיה זו ניתן לראות שלמצרים הייתה שיטה סטנדרטית למציאת הנפח של פירמידה קטומה:

גובהה של פירמידה 6 [יח״מ]

בסיסה 4 [יח״מ] ו – 2 למעלה.

עם ה - 4 הזה, תעלה בריבוע. התוצאה 16.

תכפיל 2 ב -4 הזה. התוצאה 8.

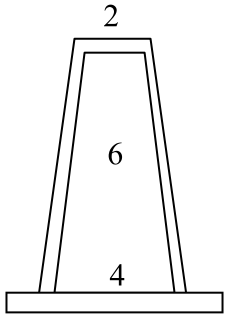
עם ה – 2 הזה, תעלה בריבוע. התוצאה 4.

תוסיף ל - 16 את ה – 8 הזה ואת ה – 4 הזה. התוצאה 28.

מצא $\frac{1}{3}$ של 6. התוצאה 2.

חשב פעמיים 28. התוצאה 56.

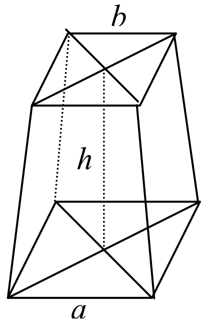
$\frac{1}{3}$




השרטוט הנלווה לבעיה 14, כפי שהופיע בפפירוס

**נסחו באמצעות סימונים מתמטיים כלליים את הנוסחא שבה השתמשו המצרים לצורך חישוב נפח פירמידה קטומה.**

**חשבו את נפח הפירמידה הקטומה הנתונה בדרך כלשהי, ובדקו האם המצרים חישבו באופן נכון את הנפח של פירמידה זו.**




**רשימת מקורות**

אביטל ש. (תשכ״ט): שברים מצריים – שברי יחידה, *גיליונות לחשבון 16,17* (מתוך אתר האינטרנט של ״קשר חם״)

דוזורצ׳ב י., ויניצקי ג., קופר א. (1997): *תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה*, הטכניון-מכון טכנולוגי לישראל

קאשי מ. (1995): מתמטיקה מצרית, *סדנאות מטעם קשר חם למרכזי המקצוע מתמטיקה* (מתוך אתר האינטרנט של ״קשר חם״)

Gillings R. J. (1972): *Mathematics in the time of the Pharaohs*, Dover Publications, Insc, N.Y.